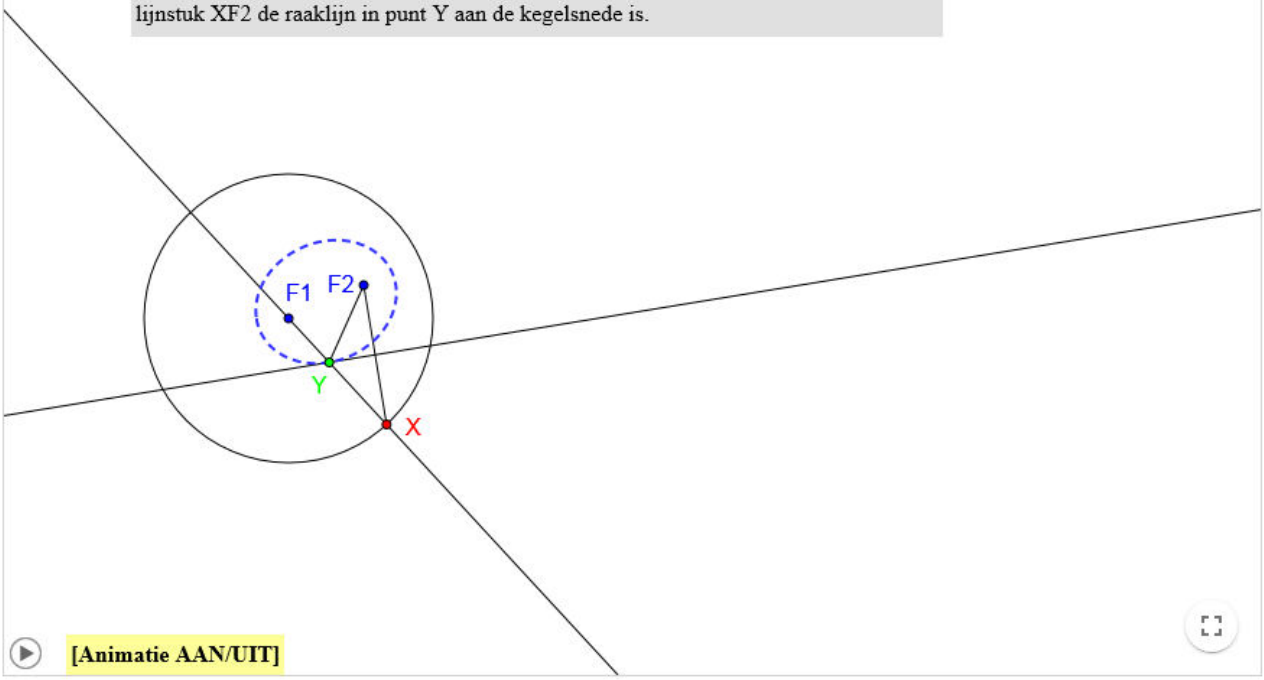
Ellips- en hyperboolconstructie

Auteur: Rinse Poortinga

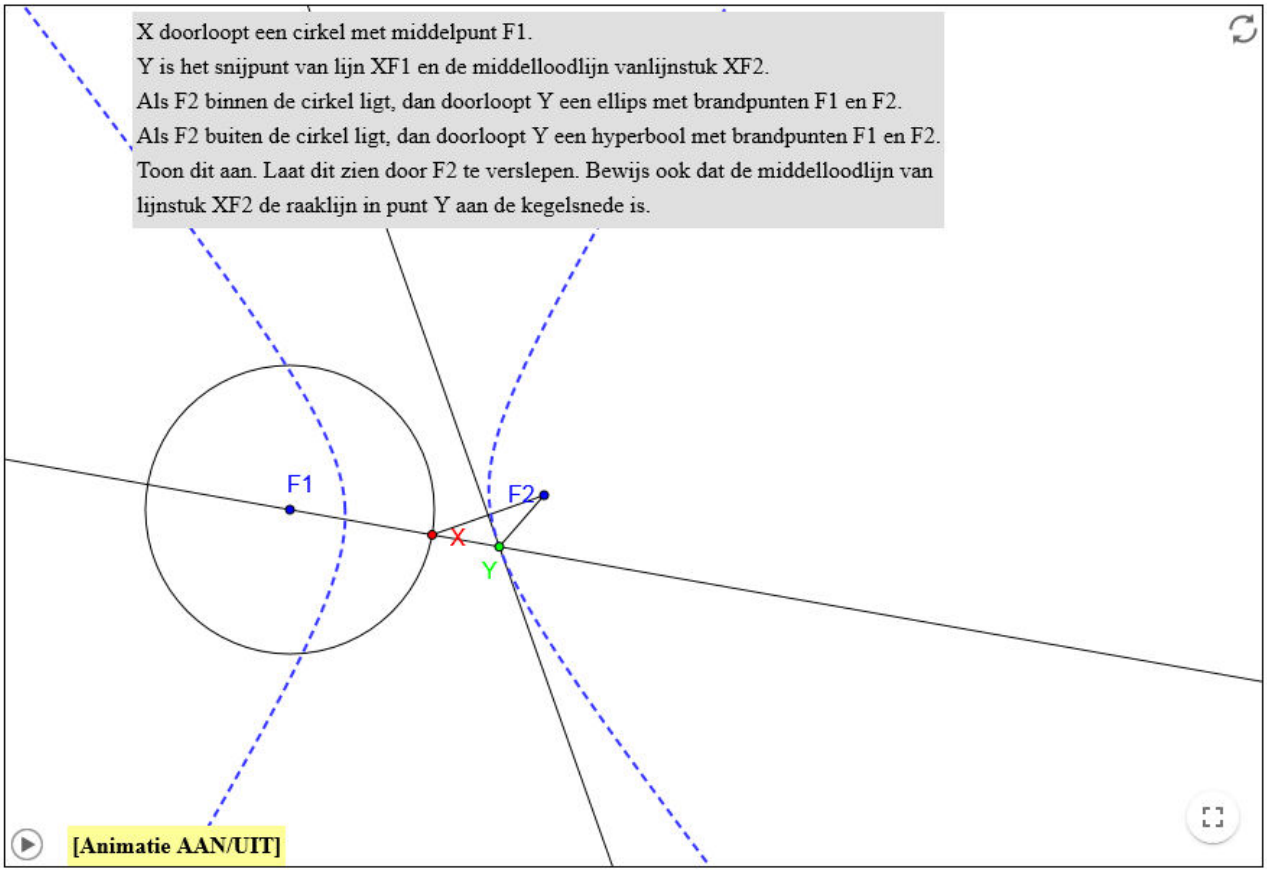
X doorloopt een cirkel met middelpunt F1.
Y is het snijpunt van lijn XF1 en de middelloodlijn vanlijnstuk XF2.
Als F2 binnen de cirkel ligt, dan doorloopt Y een ellips met brandpunten F1 en F2.
Als F2 buiten de cirkel ligt, dan doorloopt Y een hyperbool met brandpunten F1 en F2.
Toon dit aan. Laat dit zien door F2 te verslepen. Bewijs ook dat de middelloodlijn van lijnstuk XF2 de raaklijn in punt Y aan de kegelsnede is.



[Animatie AAN/UIT]

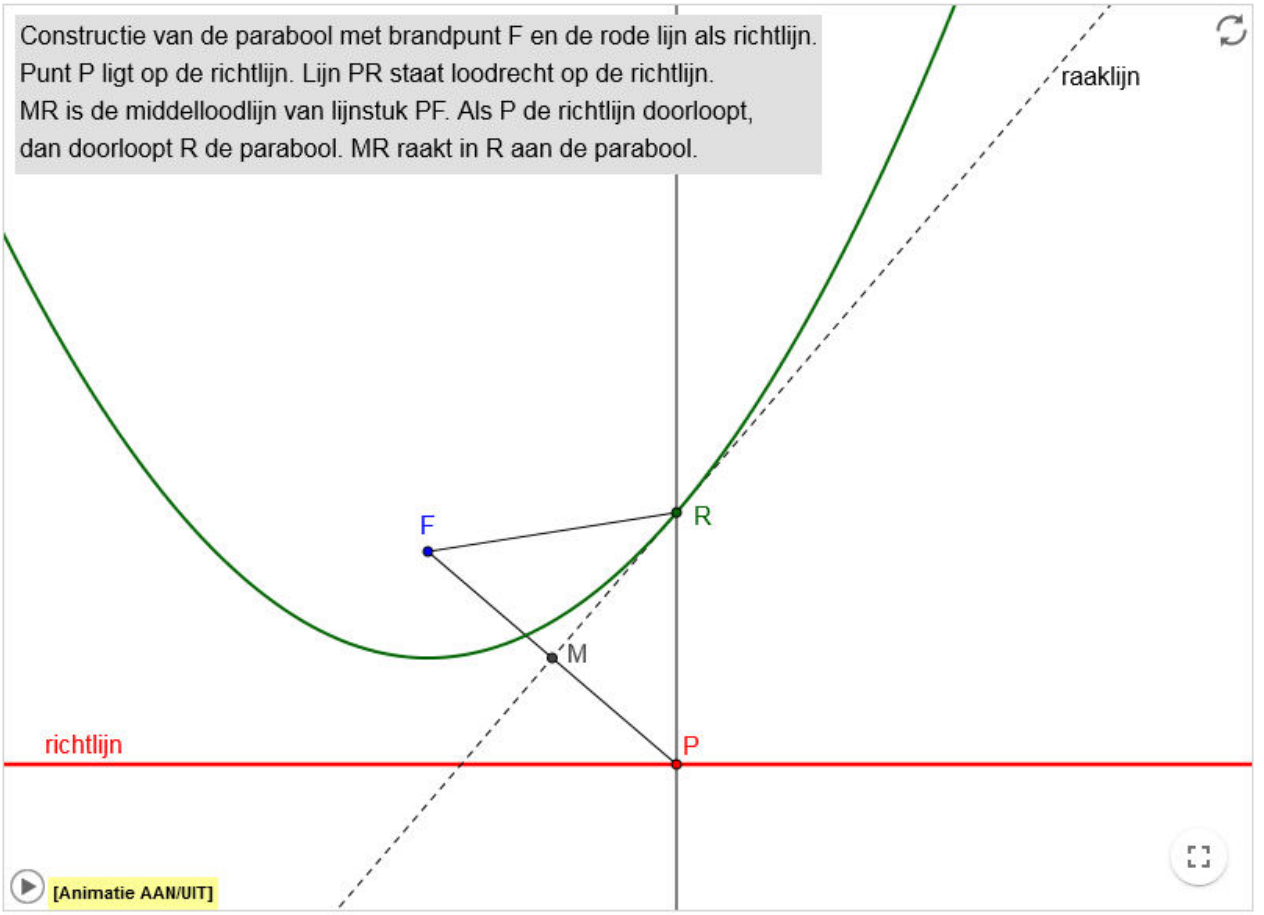
Ellips- en hyperboolconstructie

Auteur: Rinse Poortinga



Paraboolconstructie

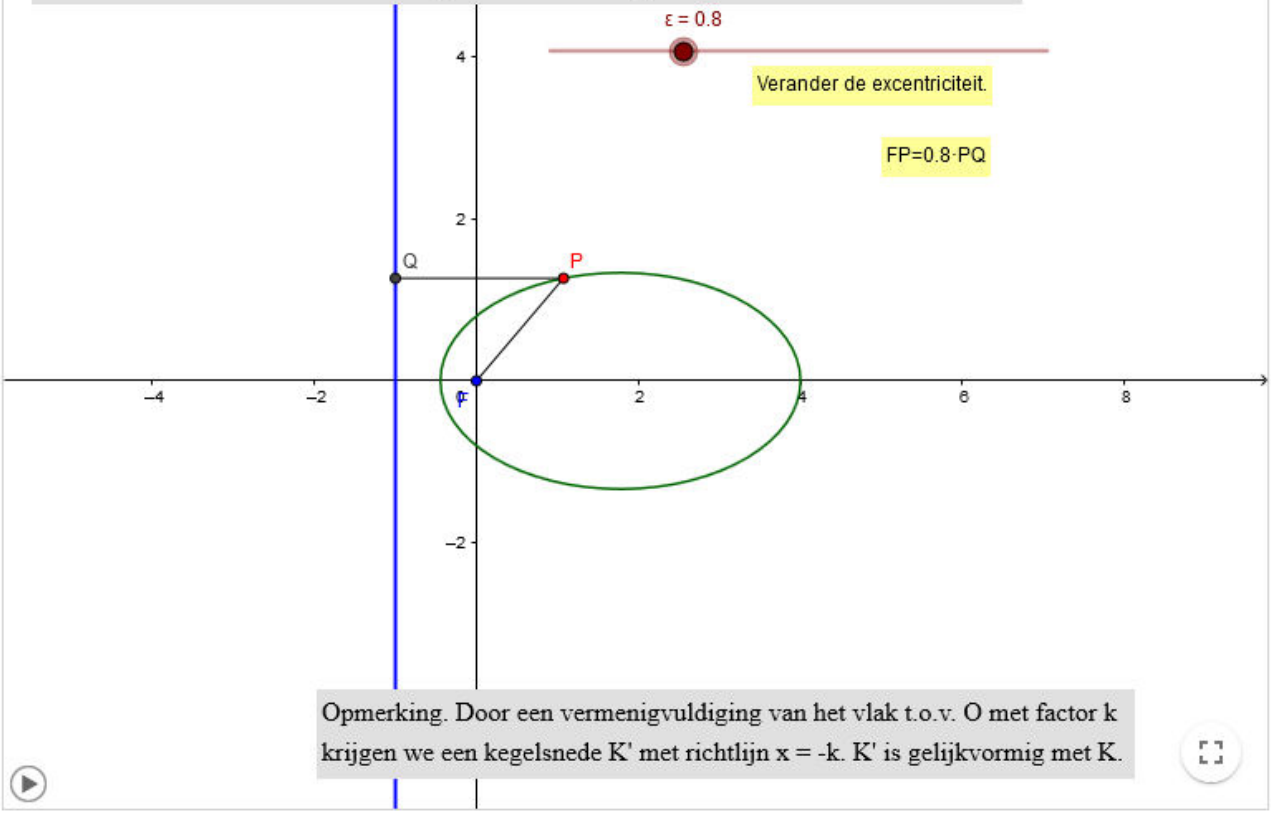
Auteur: Rinse Poortinga



Richtlijn, brandpunt en excentriciteit

Auteur: Rinse Poortinga

Richtlijn $x = -1$, brandpunt $F=O$ en excentriciteit $\varepsilon > 0$ bepalen een kegelsnede K.
K bestaat uit de punten P zo dat $FP = \varepsilon \cdot PQ$. F is een brandpunt van K.
We gaan na dat K inderdaad een kegelsnede is. Is P het punt (x,y), dan $FP^2 = (\varepsilon \cdot PQ)^2$.
Ofwel $x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot (1+x)^2$ en dus $(1 - \varepsilon^2) \cdot x^2 + y^2 - 2\varepsilon^2 \cdot x = \varepsilon^2$.
Dit is de vergelijking van een ellips als $0 < \varepsilon < 1$, van een hyperbool als $\varepsilon > 1$ en
van een parabool als $\varepsilon = 1$. [Zie Analyse + Meetkunde, hfdst. 7.] Je kunt P verslepen over K
[ook van de ene tak van een hyperbool naar de andere tak] of gebruik de animatieknop.
Verander de excentriciteit ε met behulp van de schuifknop hieronder.

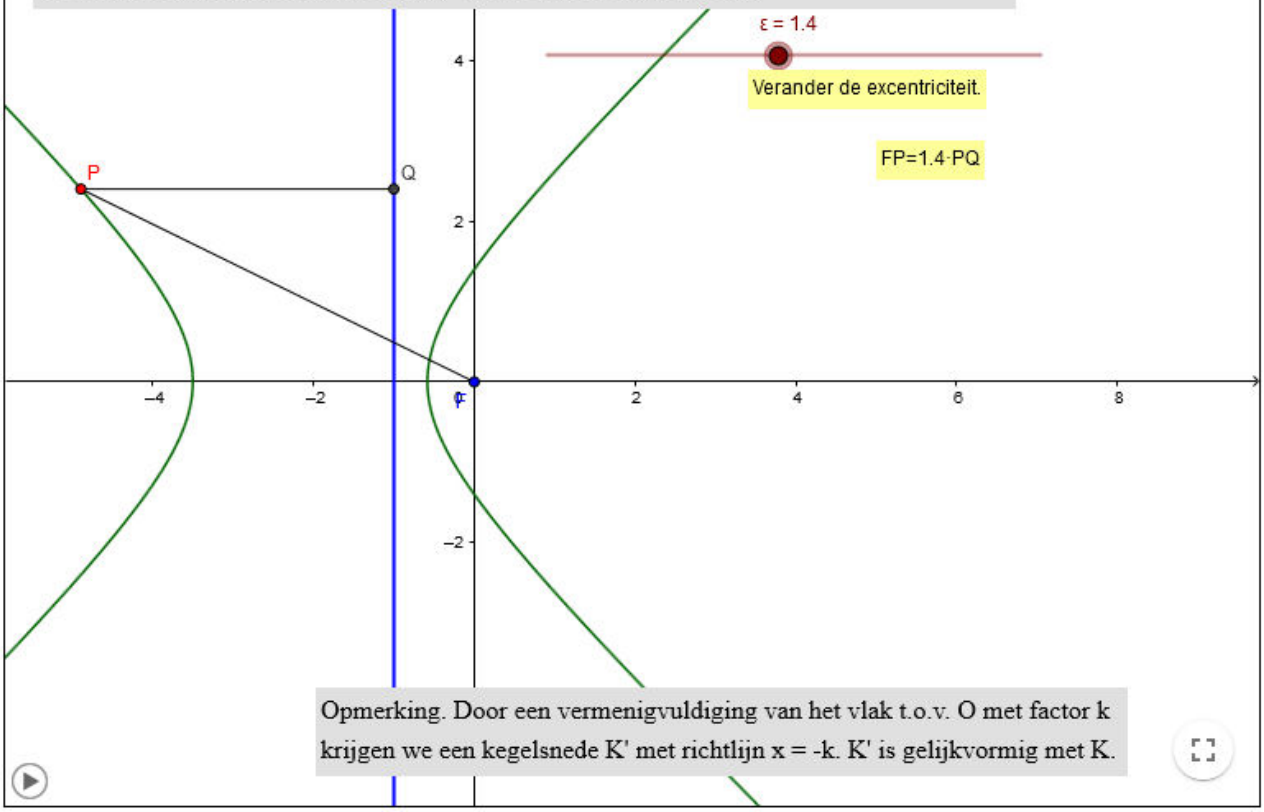


Opmerking. Door een vermenigvuldiging van het vlak t.o.v. O met factor k krijgen we een kegelsnede K' met richtlijn $x = -k$. K' is gelijkvormig met K.

Richtlijn, brandpunt en excentriciteit

Auteur: Rinse Poortinga

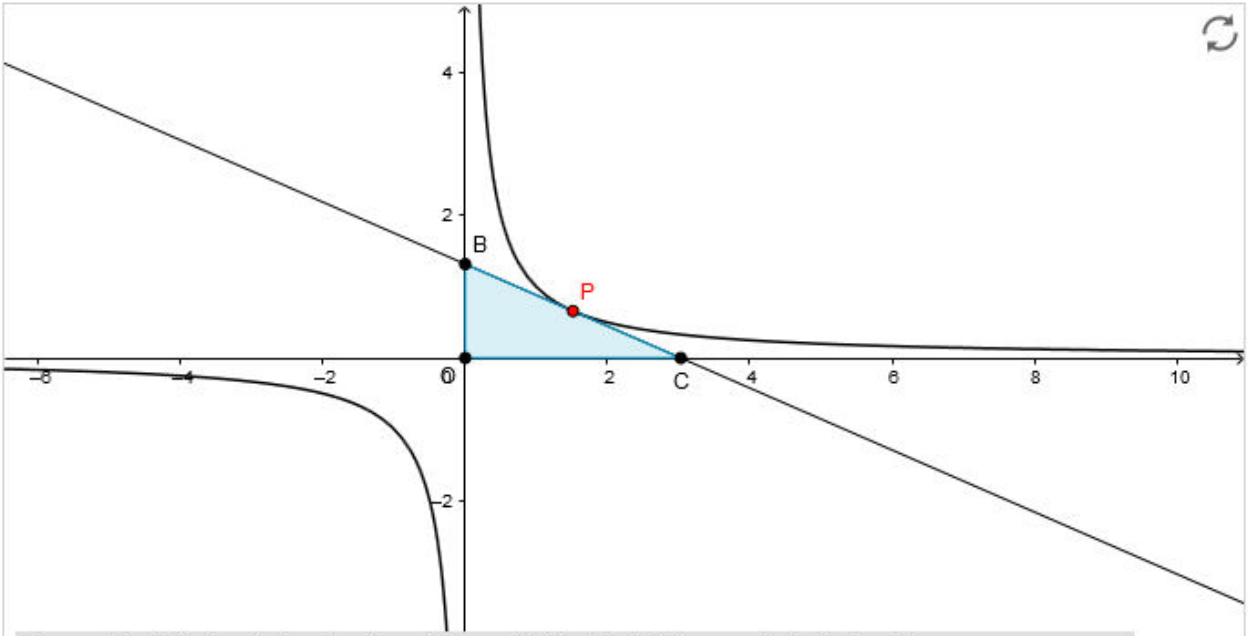
Richtlijn $x = -1$, brandpunt $F=O$ en excentriciteit $\varepsilon > 0$ bepalen een kegelsnede K.
K bestaat uit de punten P zo dat $FP = \varepsilon \cdot PQ$. F is een brandpunt van K.
We gaan na dat K inderdaad een kegelsnede is. Is P het punt (x,y), dan $FP^2 = (\varepsilon \cdot PQ)^2$.
Ofwel $x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot (1+x)^2$ en dus $(1 - \varepsilon^2) \cdot x^2 + y^2 - 2\varepsilon^2 \cdot x = \varepsilon^2$.
Dit is de vergelijking van een ellips als $0 < \varepsilon < 1$, van een hyperbool als $\varepsilon > 1$ en
van een parabool als $\varepsilon = 1$. [Zie Analyse + Meetkunde, hfdst. 7.] Je kunt P verslepen over K
[ook van de ene tak van een hyperbool naar de andere tak] of gebruik de animatieknop.
Verander de excentriciteit ε met behulp van de schuifknop hieronder.



Opmerking. Door een vermenigvuldiging van het vlak t.o.v. O met factor k
krijgen we een kegelsnede K' met richtlijn $x = -k$. K' is gelijkvormig met K.

Raaklijn en asymptoten bij een hyperbool

Auteur: Rinse Poortinga



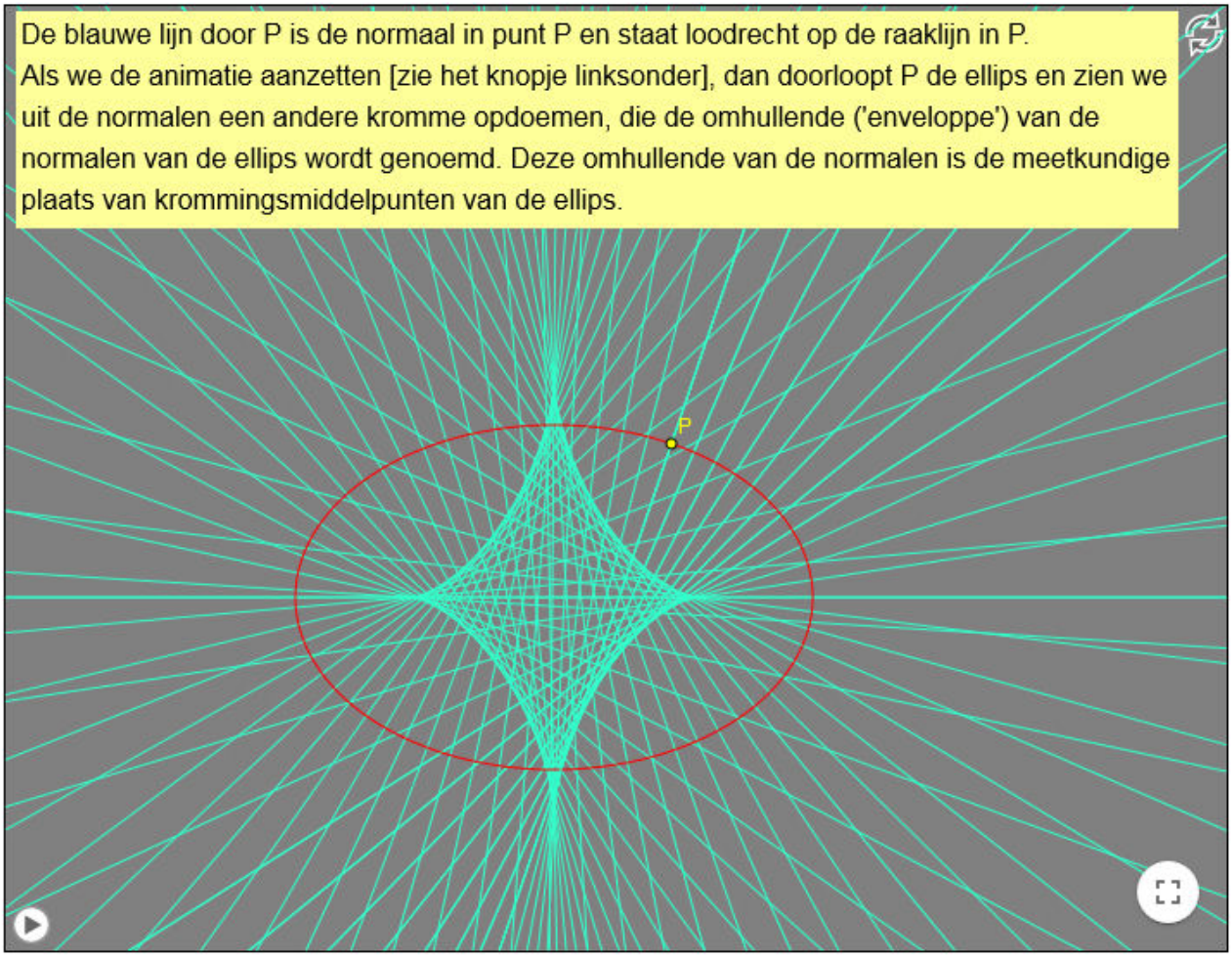
Opgave. Punt P ligt op de hyperbool x·y = 1. De raaklijn in P snijdt de asymptoten in B en C.
Toon aan dat de oppervlakte van ΔOBC steeds gelijk blijft, wanneer P de hyperbool doorloopt [ook de linker tak].
Ga na dat P het midden is van lijnstuk BC.

Opmerking. Uit deze opgave volgt dat een soortgelijk resultaat geldt voor iedere niet-ontaarde hyperbool.
Zo'n hyperbool is het transformatiebeeld van de standaardhyperbool x·y = 1 bij een affiene transformatie.
Bij een affiene transformatie gaan asymptoten over in asymptoten, raaklijnen in raaklijnen en middens in middens.
Bij een affiene transformatie worden de oppervlakten van alle driehoeken met een vaste factor vermenigvuldigd. [Zie Analyse + Meetkunde, hfdst 6 en 7.]

[Animatie AAN/UIT]

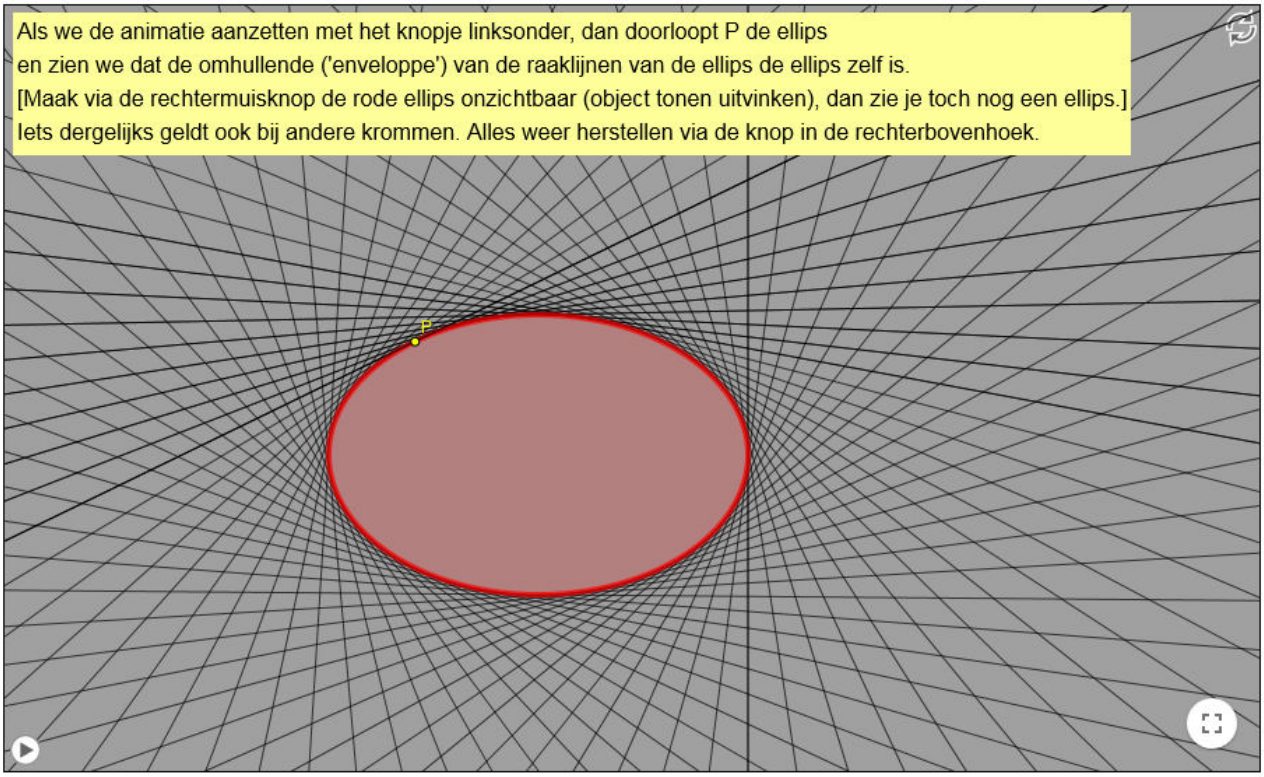
Omhullende van de normalen van een ellips

Auteur: Rinse Poortinga



Ellips als de omhullende van zijn raaklijnen

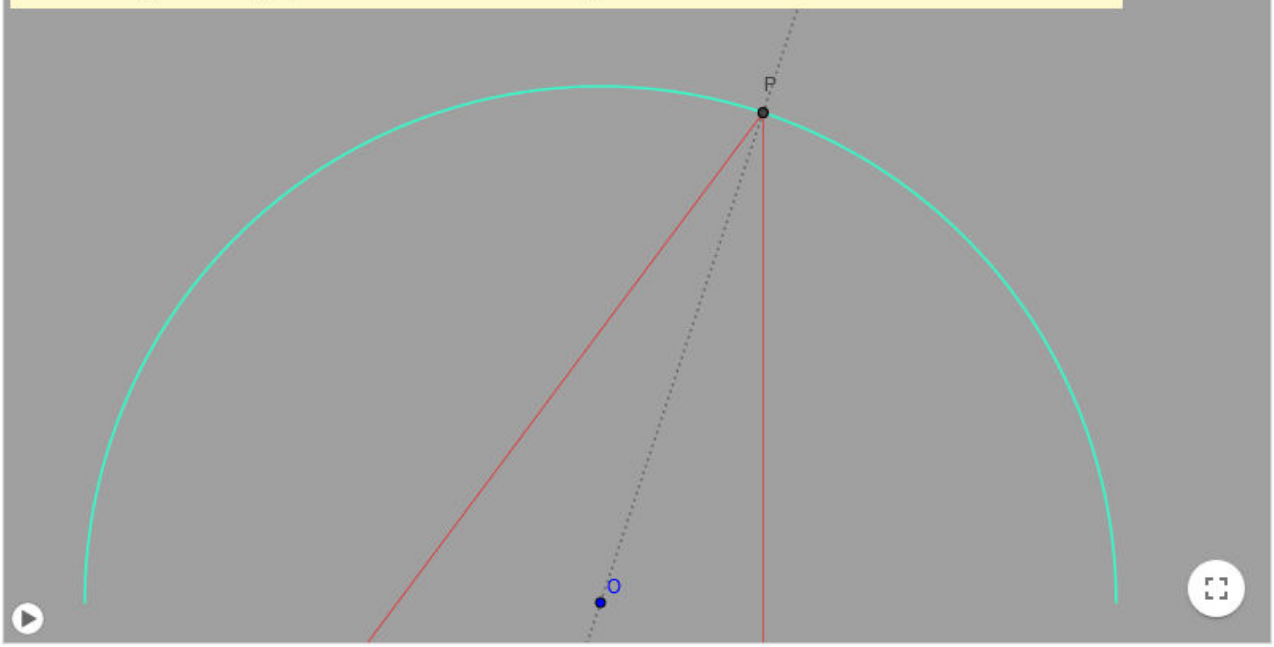
Auteur: Rinse Poortinga



Brandkromme

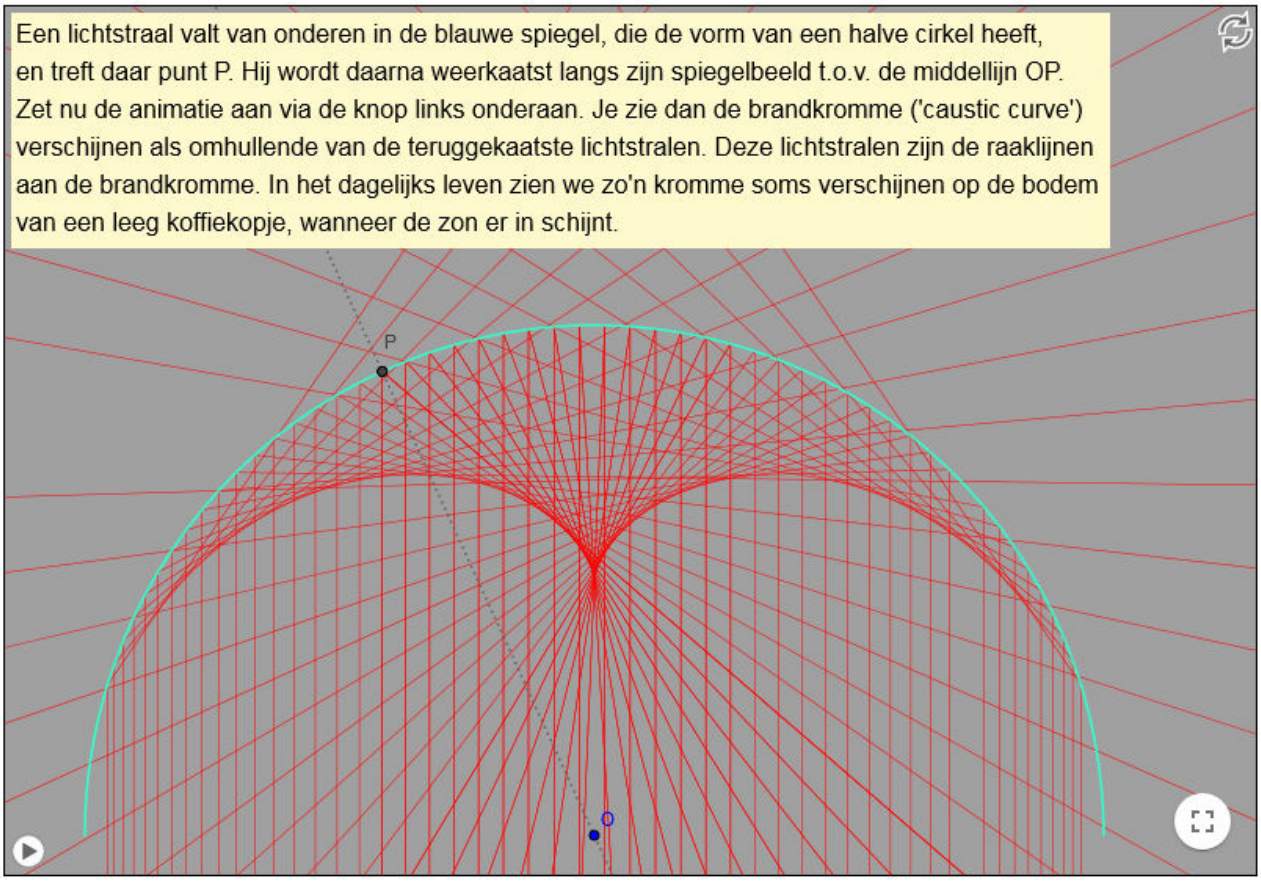
Auteur: Rinse Poortinga

Een lichtstraal valt van onderen in de blauwe spiegel, die de vorm van een halve cirkel heeft, en treft daar punt P. Hij wordt daarna weerkaatst langs zijn spiegelbeeld t.o.v. de middellijn OP. Zet nu de animatie aan via de knop links onderaan. Je zie dan de brandkromme ('caustic curve') verschijnen als omhullende van de teruggekaatste lichtstralen. Deze lichtstralen zijn de raaklijnen aan de brandkromme. In het dagelijks leven zien we zo'n kromme soms verschijnen op de bodem van een leeg koffiekopje, wanneer de zon er in schijnt.



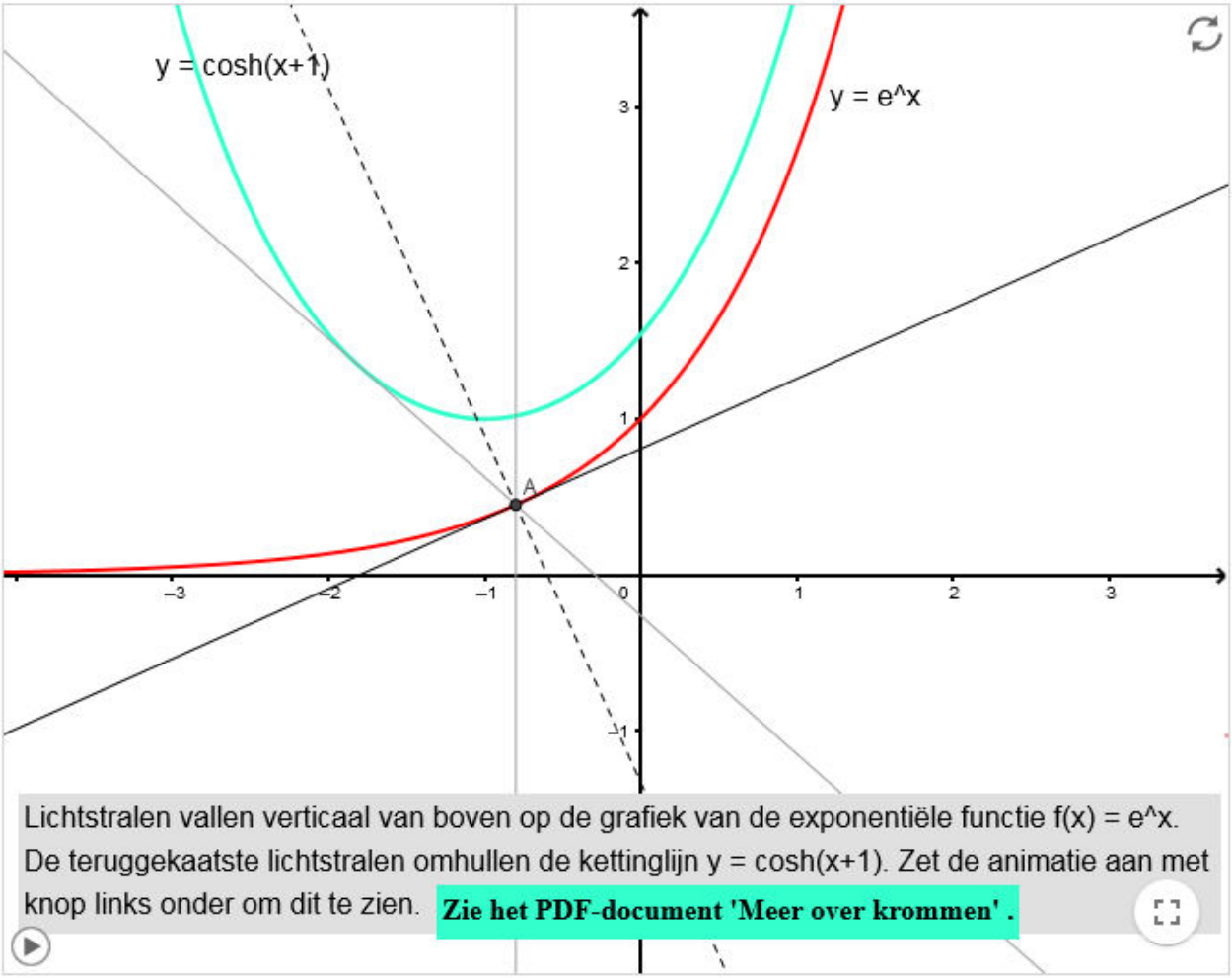
Brandkromme

Auteur: Rinse Poortinga



Kettinglijn als brandkromme

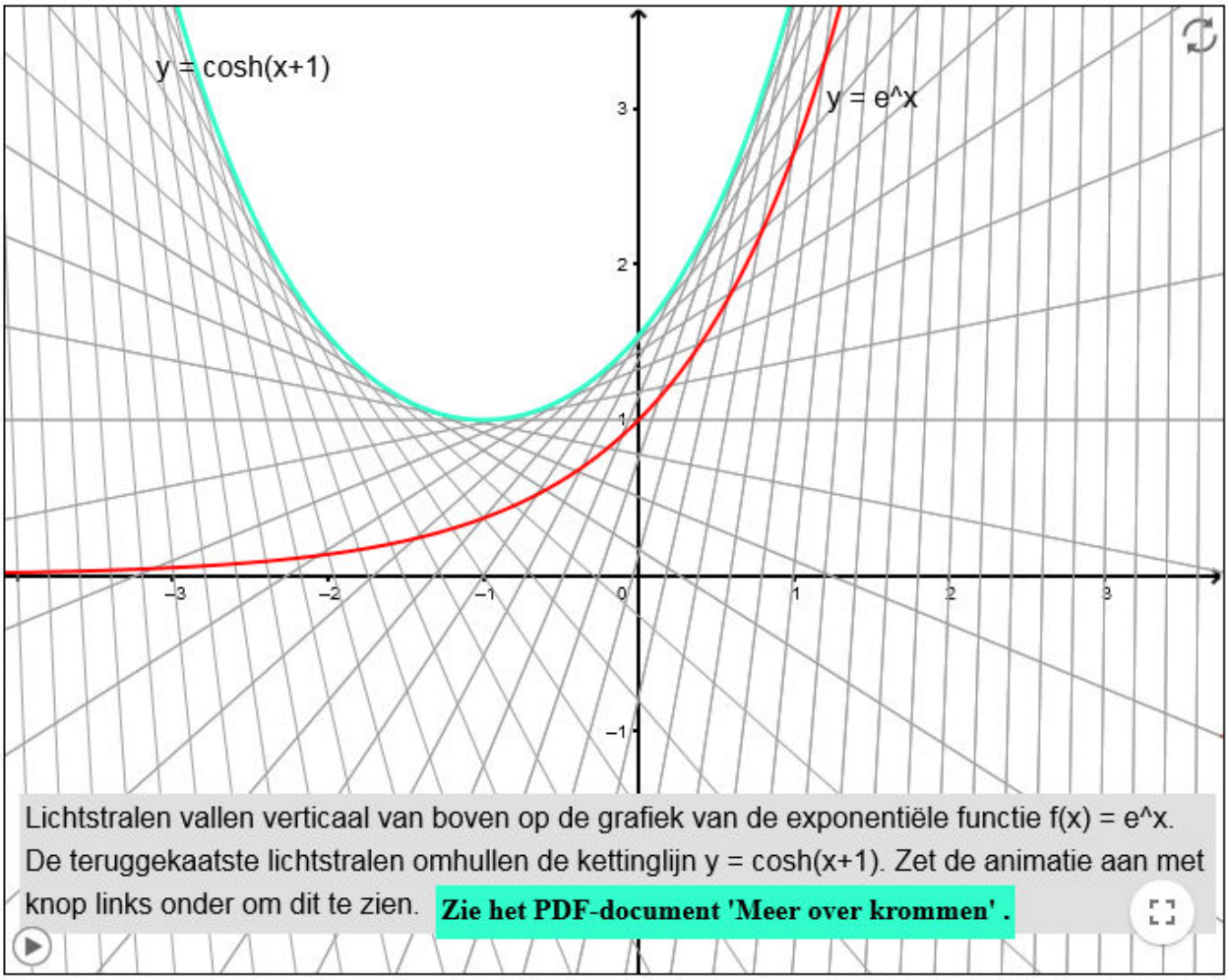
Auteur: Rinse Poortinga



Lichtstralen vallen verticaal van boven op de grafiek van de exponentiële functie f(x) = e^x. De teruggekaatste lichtstralen omhullen de kettinglijn y = cosh(x+1). Zet de animatie aan met knop links onder om dit te zien. **Zie het PDF-document 'Meer over krommen' .**

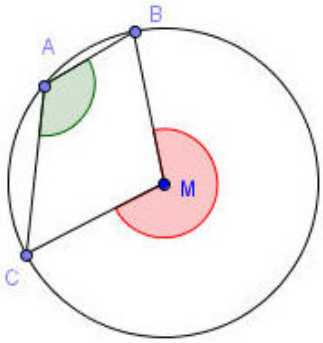
Kettinglijn als brandkromme

Auteur: Rinse Poortinga



Lichtstralen vallen verticaal van boven op de grafiek van de exponentiële functie f(x) = e^x. De teruggekaatste lichtstralen omhullen de kettinglijn y = cosh(x+1). Zet de animatie aan met knop links onder om dit te zien. **Zie het PDF-document 'Meer over krommen' .**

Omtrekshoek en middelpuntshoek

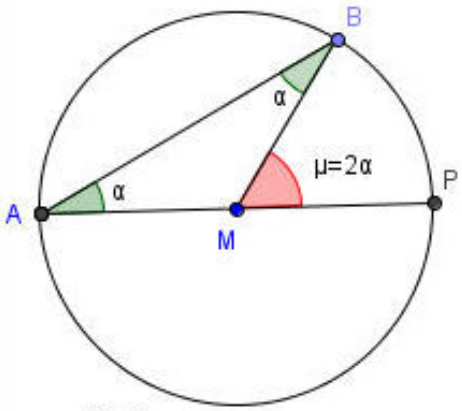


Wanneer staan een omtrekshoek en een middelpuntshoek op dezelfde boog?

Bij een omtrekshoek ∠BAC is de cirkelboog waarop hij staat eenduidig bepaald: dat is de boog met eindpunten B en C waarop het punt A niet ligt.
Is ∠BMC een middelpuntshoek, dan maakt de notatie ∠BMC niet duidelijk welke van de twee in aanmerking komende hoeken bedoeld is.
De middelpuntshoek ∠BMC die bij omtrekshoek ∠BAC hoort, is de hoek waarbinnen de cirkelsector ligt die begrensd wordt door de stralen MB en MC en door de cirkelboog waarop punt A niet ligt. Deze middelpuntshoek ∠BMC staat op dezelfde cirkelboog als omtrekshoek ∠BAC.

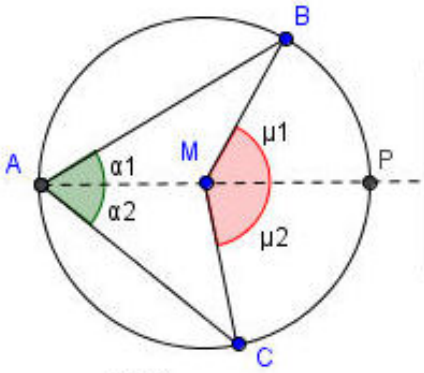
(a) In een cirkel is een omtrekshoek gelijk aan de helft van de bijbehorende middelpuntshoek.
(b) Omtrekshoeken die op dezelfde cirkelboog staan zijn even groot.

Onderdeel (b) volgt uit (a). Bewijs van (a):



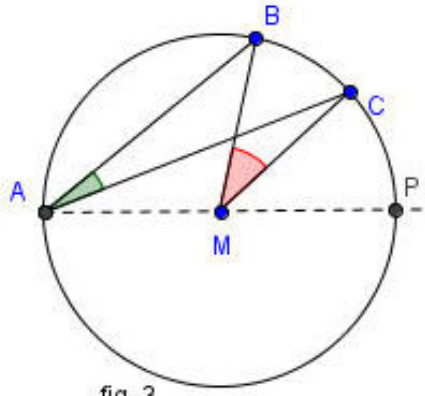
Toon aan dat ∠BMP=2·∠BAP.

fig. 1



Omtrekshoek ∠BAC is de helft van middelpuntshoek ∠BMC.
Bewijs. ∠BMP=μ1, ∠CMP=μ2, ∠BMC=μ=μ1+μ2,
∠BAP=α1, ∠CAP=α2, ∠BAC=α=α1+α2.
Er geldt μ1=2·α1, μ2=2·α2.
Dus μ=μ1+μ2=2·α1+2·α2=2·(α1+α2)=2·α.

fig. 2



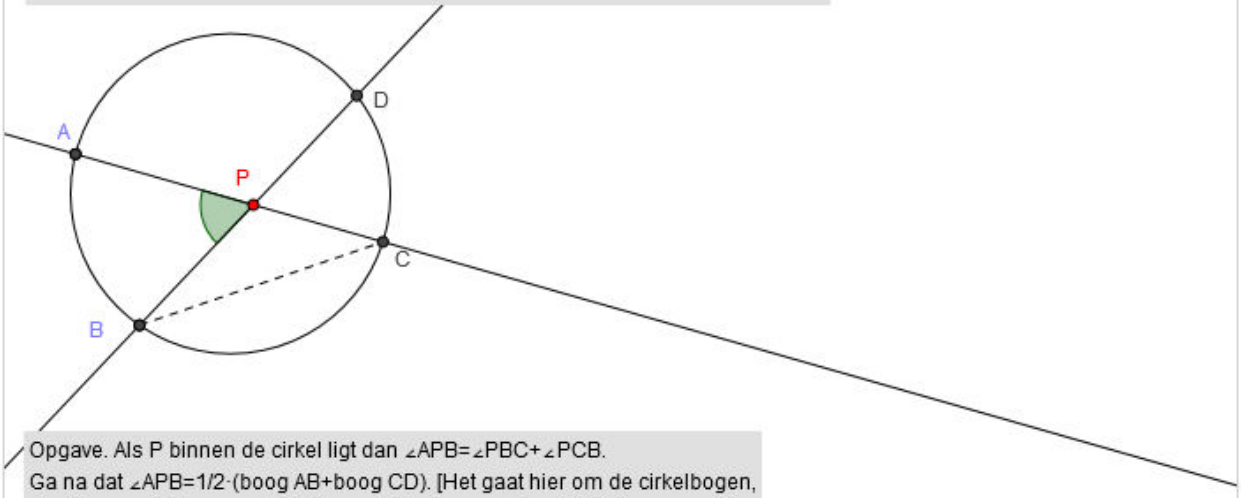
Omtrekshoek ∠BAC is de helft van middelpuntshoek ∠BMC.
Bewijs. ∠BMP=μ1, ∠CMP=μ2, ∠BMC=μ=μ1-μ2,
∠BAP=α1, ∠CAP=α2, ∠BAC=α=α1-α2.
Er geldt μ1=2·α1, μ2=2·α2.
Dus μ=μ1-μ2=2·α1-2·α2=2·(α1-α2)=2·α

fig. 3

Hoeken en cirkelbogen

Auteur: Rinse Poortinga

Neem twee vaste punten A en B op een cirkel.
P is een derde punt binnen, op of buiten de cirkel.
De lijnen AP en BP snijden de cirkel verder nog in de punten C resp. D.
De straal van de cirkel is voor de grootte van de hoeken niet van belang.
We nemen daarom gemakshalve aan dat de straal van de cirkel gelijk aan 1 is.
Dan is een omtrekshoek van de cirkel (in radialen) gelijk aan de helft van de lengte van de cirkelboog waarop hij staat.



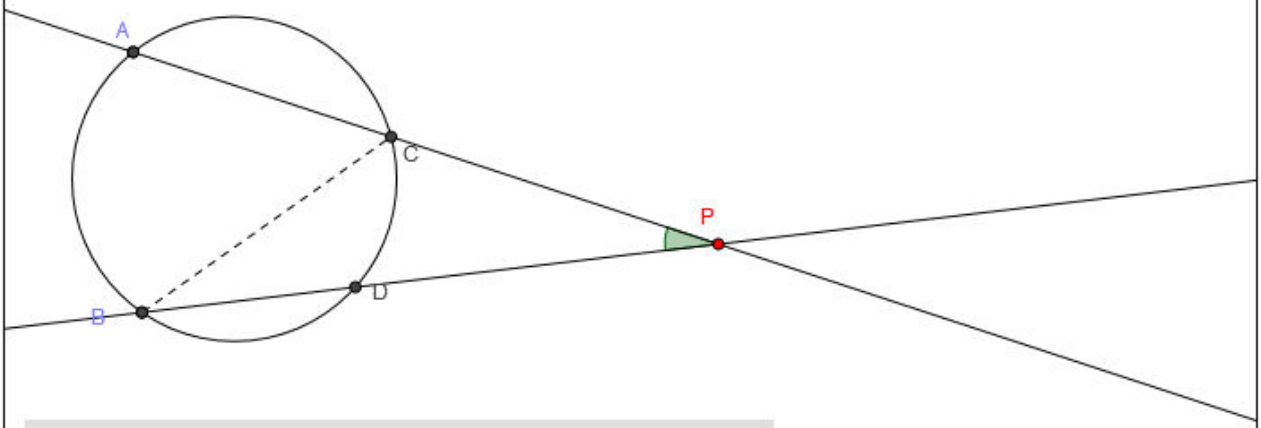
Opgave. Als P binnen de cirkel ligt dan ∠APB=∠PBC+∠PCB.
Ga na dat ∠APB=1/2·(boog AB+boog CD). [Het gaat hier om de cirkelbogen, die binnen ∠APB resp. ∠CPD liggen.] Versleep nu P geleidelijk naar rechts.
Als P op de cirkel ligt, dan vallen P, C en D samen en ∠APB=1/2·boog AB.
Ligt P buiten de cirkel dan ∠APB=1/2·(boog AB - boog CD). Toon dit aan.

Opgave. Hoek tussen raaklijn en koorde.
Stel AB is een koorde van een cirkel met straal 1.
C is een punt buiten de cirkel zo dat de halve lijn BC een halve raaklijn is.
Toon aan dat ∠ABC gelijk aan aan de helft van de boog waarop hij staat (d.w.z. de boog binnen ∠ABC).

Hoeken en cirkelbogen

Auteur: Rinse Poortinga

Neem twee vaste punten A en B op een cirkel.
P is een derde punt binnen, op of buiten de cirkel.
De lijnen AP en BP snijden de cirkel verder nog in de punten C resp. D.
De straal van de cirkel is voor de grootte van de hoeken niet van belang.
We nemen daarom gemakshalve aan dat de straal van de cirkel gelijk aan 1 is.
Dan is een omtrekshoek van de cirkel (in radialen) gelijk aan de helft van de lengte van de cirkelboog waarop hij staat.



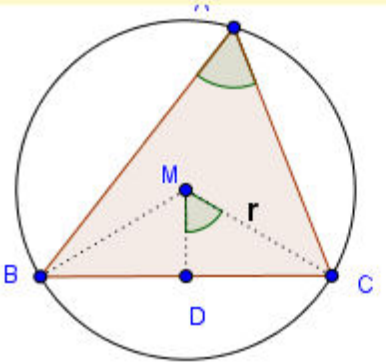
Opgave. Als P binnen de cirkel ligt dan ∠APB=∠PBC+∠PCB.
Ga na dat ∠APB=1/2·(boog AB+boog CD). [Het gaat hier om de cirkelbogen, die binnen ∠APB resp. ∠CPD liggen.] Versleep nu P geleidelijk naar rechts.
Als P op de cirkel ligt, dan vallen P, C en D samen en ∠APB=1/2·boog AB.
Ligt P buiten de cirkel dan ∠APB=1/2·(boog AB - boog CD). Toon dit aan.

Opgave. Hoek tussen raaklijn en koorde.
Stel AB is een koorde van een cirkel met straal 1.
C is een punt buiten de cirkel zo dat de halve lijn BC een halve raaklijn is.
Toon aan dat ∠ABC gelijk aan aan de helft van de boog waarop hij staat (d.w.z. de boog binnen ∠ABC).

Sinusregel (uitgebreid)

Is r de straal van de omgeschreven cirkel van ΔABC, dan geldt

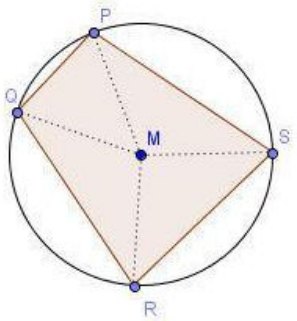
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot r$$



Bewijs. De straal van de omgeschreven cirkel van ΔABC is r. De zijden en hoeken van ΔABC worden op de gebruikelijke wijze genoteerd als a, b, c resp. α,β,γ. M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel en MD is de middelloodlijn van koorde BC. ∠A=∠DMC [Omtrekshoek is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek]. Ga na dat BC=a=2·r·sin(α). Evenzo: AB=c=2·r·sin(γ) en AC=b=2·r·sin(β). Hieruit volgt: a/sin(α)=b/sin(β)=c/sin(γ)=2·r . [Ga na dat dit ook nog geldt als hoek α recht of stomp is.]

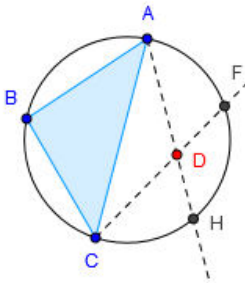
Koordenvierhoek

Auteur: Rinse Poortinga



Opgave. In een koordenvierhoek PQRS is de som van een paar overstaande hoeken gelijk aan π (180°). Toon dit aan.Omgekeerd geldt ook: een vierhoek PQRS die zichzelf niet doorsnijdt is een koordenvierhoek, wanneer de som van een paar overstaande hoeken gelijk aan π (180°) is. Zie hieronder.

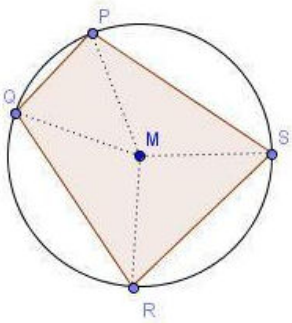
Versleep punt D van het binnengebied naar het buitengebied van de cirkel.



Opgave.Als vierhoek ABCD zichzelf niet doorsnijdt en niet een koordenvierhoek is, dan ligt D binnen of buiten de omgeschreven cirkel van ΔABC. Neem aan dat de omgeschreven cirkel van ΔABC een straal 1 heeft. We kunnen dan ∠ADC eenvoudig uitdrukken in cirkelbogen. Ga na dat ∠ABC + ∠ADC groter dan π is, als D binnen de cirkel ligt. Ligt D buiten de cirkel, dan ∠ABC + ∠ADC < π. Met D op de cirkel geldt ∠ABC + ∠ADC = π.

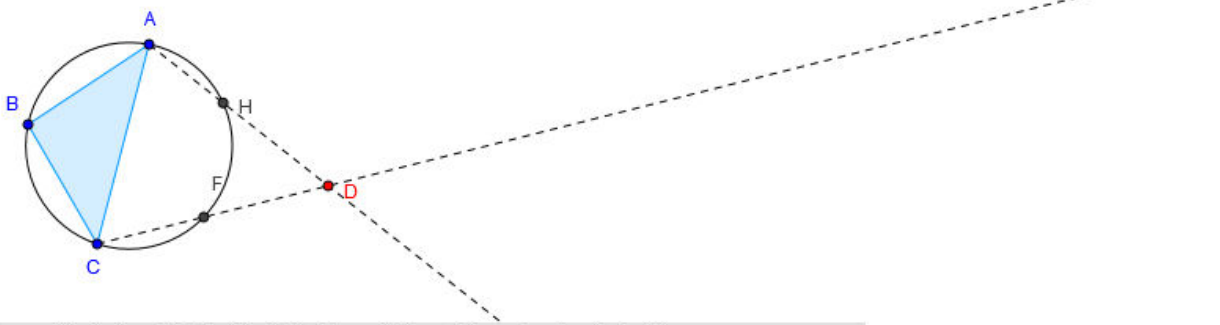
Koordenvierhoek

Auteur: Rinse Poortinga



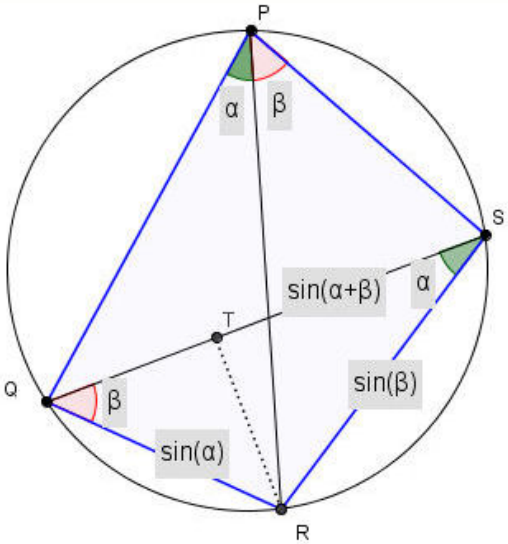
Opgave. In een koordenvierhoek PQRS is de som van een paar overstaande hoeken gelijk aan π (180°). Toon dit aan.Omgekeerd geldt ook: een vierhoek PQRS die zichzelf niet doorsnijdt is een koordenvierhoek, wanneer de som van een paar overstaande hoeken gelijk aan π (180°) is. Zie hieronder.

Versleep punt D van het binnengebied naar het buitengebied van de cirkel.



Opgave.Als vierhoek ABCD zichzelf niet doorsnijdt en niet een koordenvierhoek is, dan ligt D binnen of buiten de omgeschreven cirkel van ΔABC. Neem aan dat de omgeschreven cirkel van ΔABC een straal 1 heeft. We kunnen dan ∠ADC eenvoudig uitdrukken in cirkelbogen. Ga na dat ∠ABC + ∠ADC groter dan π is, als D binnen de cirkel ligt. Ligt D buiten de cirkel, dan ∠ABC + ∠ADC < π. Met D op de cirkel geldt ∠ABC + ∠ADC = π.

Formules voor sin(a+b) en cos(a+b)



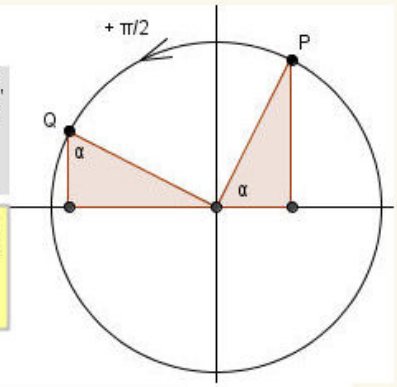
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$$

(We nemen hier aan dat α,β>0 en α+β<π.)

Bewijs. PQRS is een koordenvierhoek die zichzelf niet doorsnijdt.
De omgeschreven cirkel heeft middellijn 1. Uit de uitgebreide sinusregel volgt dat QR=sin(α), RS=sin(β) en QS=sin(α+β).
Trek de hoogtelijn RT in ΔQSR. Ga na dat QT=sin(α)·cos(β) en TS=sin(β)·cos(α). Hiermee is bewezen dat sin(α+β)=QT+TS=sin(α)·cos(β)+sin(β)cos(α).

P en Q zijn punten op de eenheidscirkel, xP=cos(α), yP=sin(α) met 0<α<π/2. Dan: cos(α+π/2) = xQ = - sin(α) en sin(α+π/2) = yQ = cos(α). Dus:

$$\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)=-\sin(\alpha)$$
$$\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)=\cos(\alpha)$$

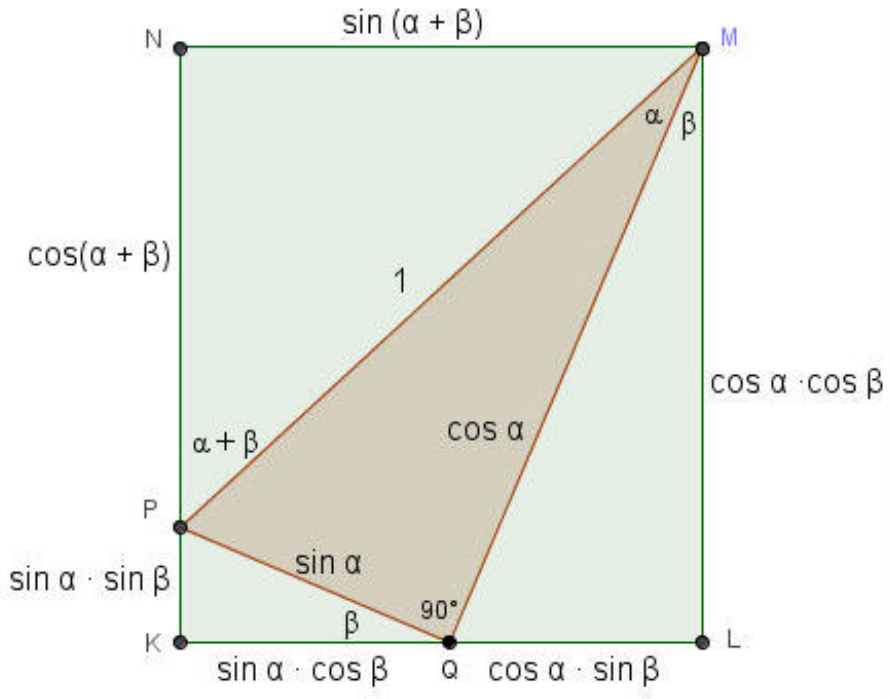


Voor α,β>0 en α+β<π/2 volgt uit bovenstaande formules sin((α+π/2)+β)=sin(α+π/2)·cos(β)+cos(α+π/2)·sin(β) ofwel sin((α+β)+π/2)=cos(α+β)=cos(α)·cos(β)-sin(α)·sin(β). Dus:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Andere manier:

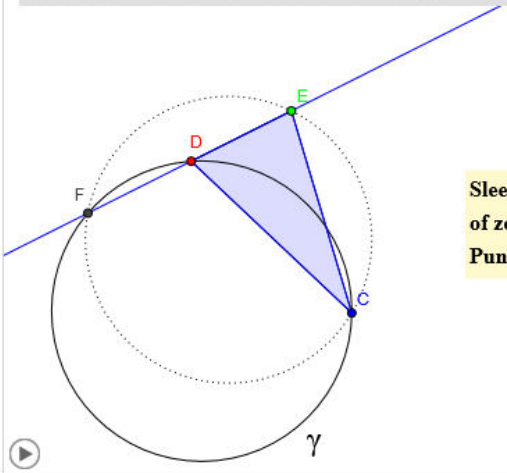
$\alpha, \beta \geq 0$ en $\alpha + \beta \leq 90°$.
Verder PM = 1, $\angle PQM = 90°$ en KLMN is een rechthoek.
Leidt hieruit de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ af.
Als $\beta = \alpha$, dan krijgen we de formules voor $\sin(2\alpha)$ en $\cos(2\alpha)$.



Constante hoeken

Auteur: Rinse Poortinga

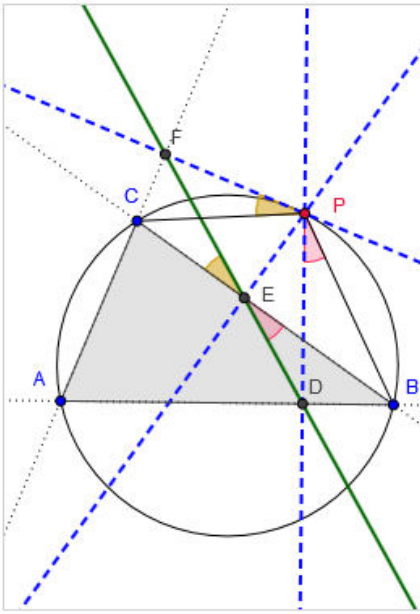
Opgave: C is een vast punt op een cirkel γ. Punt D doorloopt cirkel γ.
De hoeken van driehoek CDE zijn constant, dus alle driehoeken CDE zijn gelijkvormig.
(a) Toon aan dat voor iedere keuze van D op cirkel γ de lijn DE door een vast punt F op γ gaat.
(b) Toon aan dat voor elke keuze van D op cirkel γ de omgeschreven cirkel van driehoek FCE dezelfde cirkel is.



Sleep punt D over de doorgetrokken cirkel of zet de animatie aan met de knop linksonder. Punt E doorloopt dan de gestippelde cirkel.

Lijn van Wallace

Auteur: Rinse Poortinga



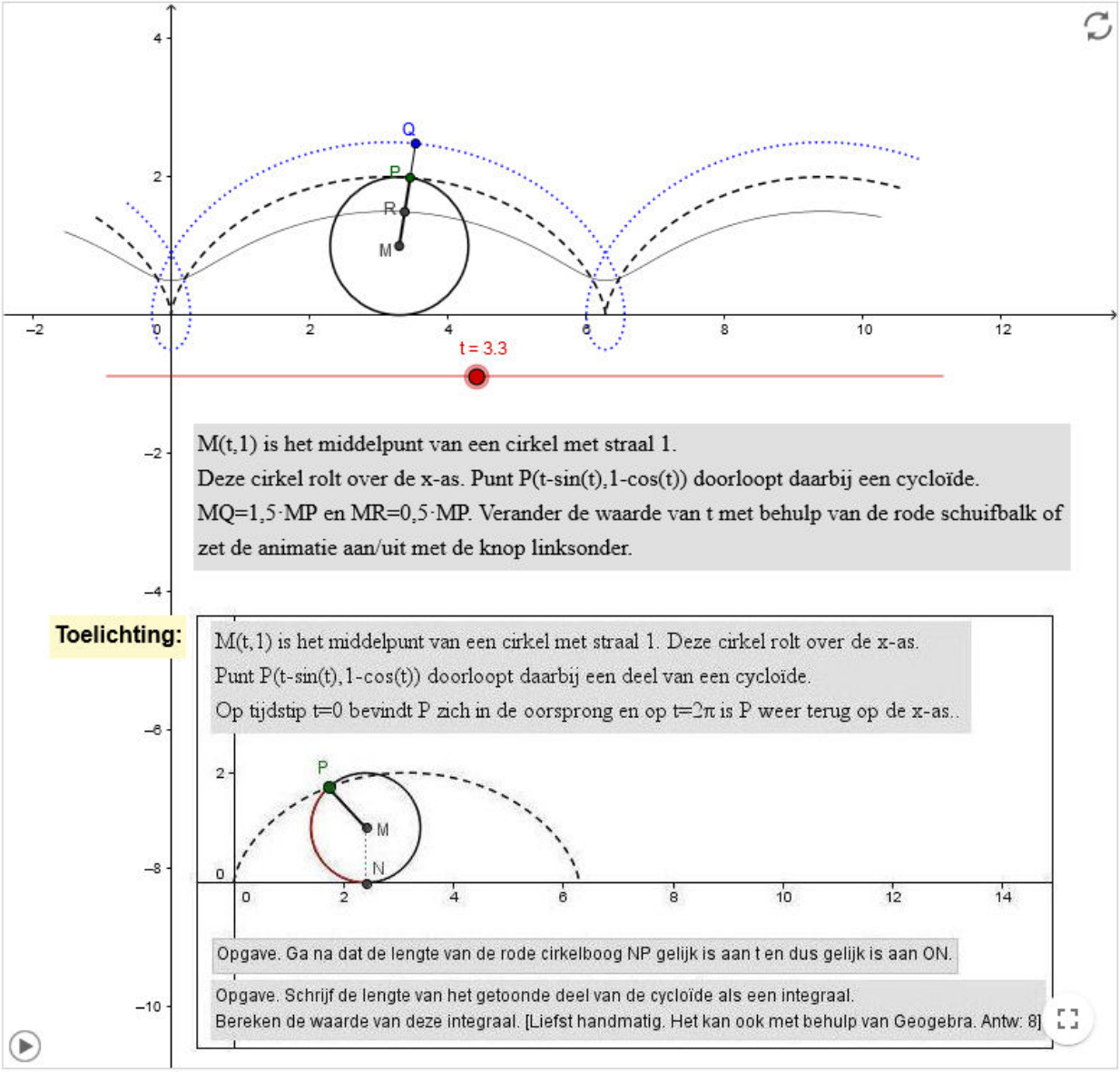
P is een punt op de omgeschreven cirkel van ΔABC.
D, E en F zijn de voetpunten van de loodlijnen vanuit P op de zijlijnen van ΔABC.
De punten D, E en F liggen op een lijn, die de lijn van Wallace bij punt P wordt genoemd.
Je kunt dit zien door punt P over de cirkel te slepen.

Bewijs: D, E en F liggen op één lijn, wanneer ∠CEF = ∠DEB.
We gaan na dat dit inderdaad het geval is.
Er geldt ∠CEF=∠CPF, want C, E, P en F liggen op de cirkel met middellijn CP.
Beide hoeken staan in deze cirkel op dezelfde boog. Om dezelfde reden geldt ∠DEB=∠DPB, want P, B, D en E liggen op de cirkel met middellijn PB.
Verder is ABPC een koordenvierhoek, dus ∠A+∠CPD+∠DPB=π.
Ook ADPF is een koordenvierhoek, ∠A+∠CPD+∠CPF=π.
Hieruit volgt ∠CPF=∠DPB en dus ook ∠CEF=∠DEB.
Dat betekent dat de punten D, E en F op één lijn liggen.

Opmerking. Dit bewijs gaat niet meer op, als punt P op een middellijn van de omgeschreven cirkel ligt [i.h.b. als P samenvalt met A, B of C].
Toon aan dat de stelling ook in deze gevallen blijft gelden.

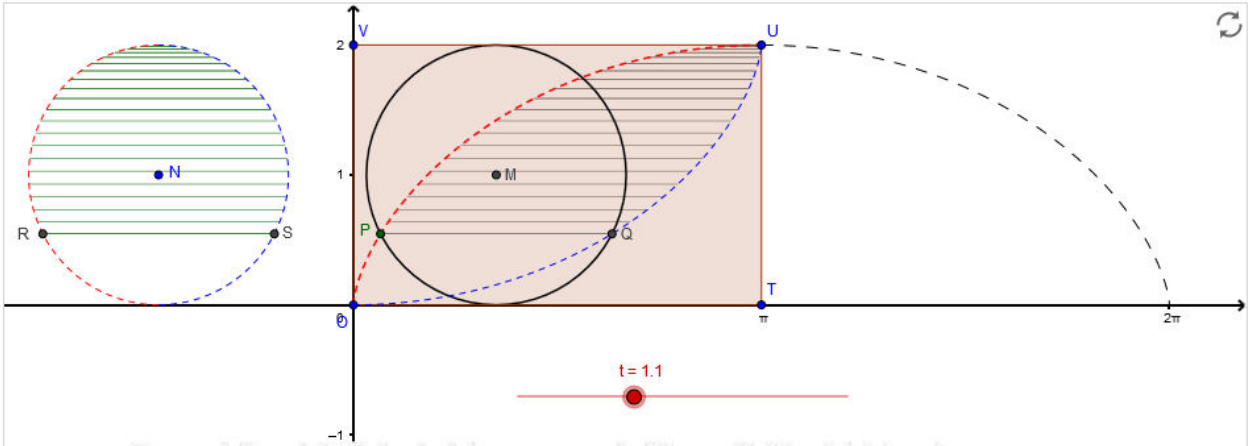
Cycloïde

Auteur: Rinse Poortinga



Oppervlakte onder een cycloïdeboog

Auteur: Rinse Poortinga



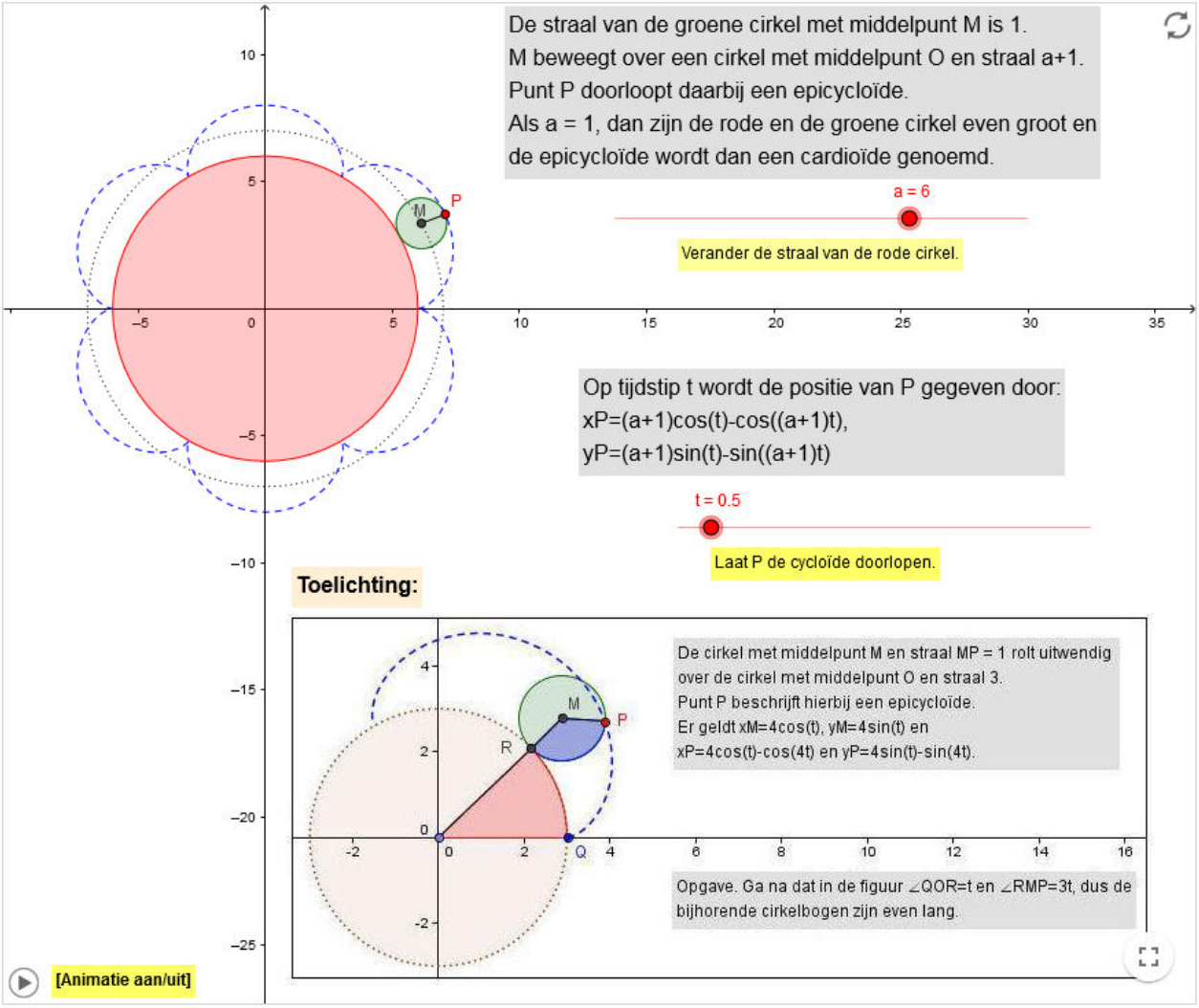
De oppervlakte van het gebied onder de boog van een cycloide kan gemakkelijk met de integraal

$$\int_{t=0}^{2\pi} (1-\cos t)\, d(t-\sin t)$$

berekend worden, maar de volgende berekening is leuker en geeft een mooie illustratie van het beginsel van Cavalieri [zie bijv. Wikipedia]. In de figuur hierboven zijn M en N de middelpunten van een cirkel met straal 1. Cirkel (M,1) rolt over de x-as. Punt P(t-sin t,1-cos t) doorloopt het rode deel van een cycloïde, wanneer t toeneemt van 0 tot π. Ook punt Q(t+sin t,1-cos t) doorloopt hierbij een deel van een cycloïde (blauw). PQ is een horizontale koorde van de cirkel. Met koorde PQ correspondeert in de linkse cirkel (N,1) de koorde RS. De punten P, Q, R en S liggen op een horizontale lijn. De koorden RS en PQ zijn dus even lang. Volgens het beginsel van Cavalieri is de oppervlakte van het gebied tussen de rode en de blauwe cycloïdeboog evengroot als de oppervlakte van cirkel (N,1) en dus gelijk aan π. Het is nu eenvoudig na te gaan dat de oppervlakte van het gebied begrensd door de hele cycloïdeboog (rood + zwart) en de x-as gelijk is aan 3π. Verander de waarde van t met behulp van de rode schuifbalk of zet de animatie aan/uit met de knop linksonder.

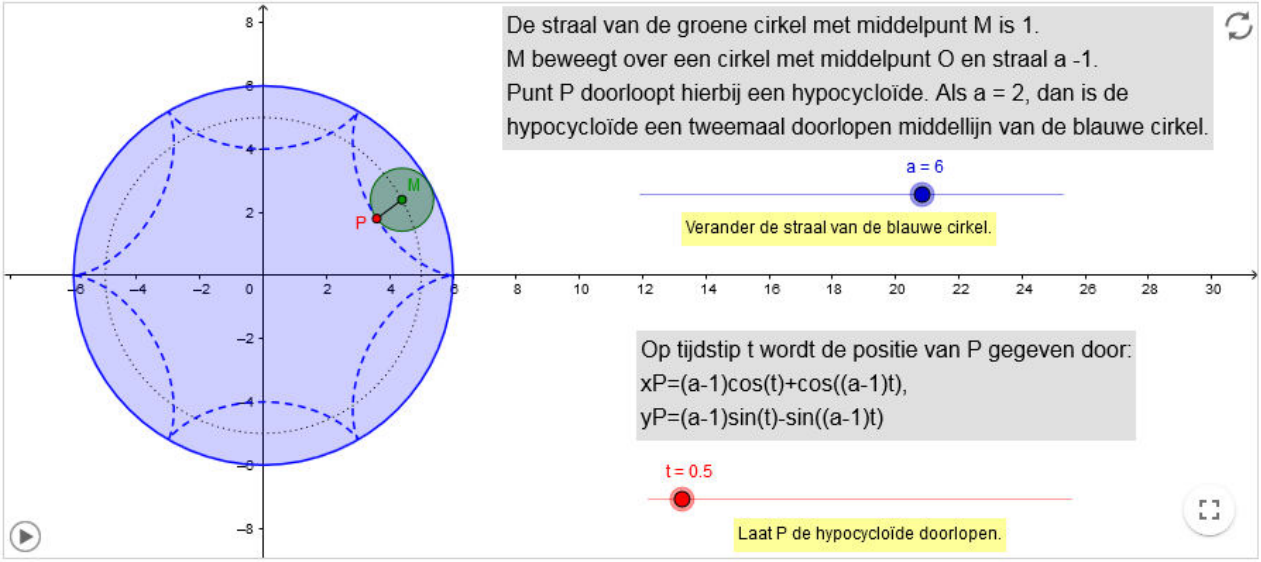
Epicycloïden

Auteur: Rinse Poortinga



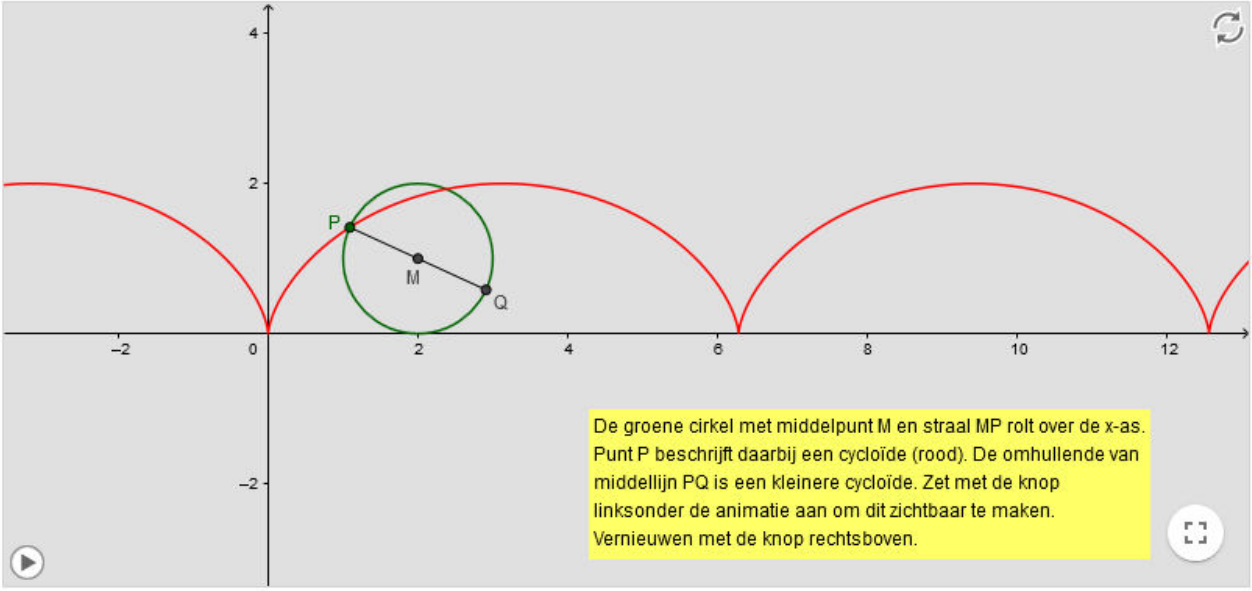
Hypocycloïden

Auteur: Rinse Poortinga



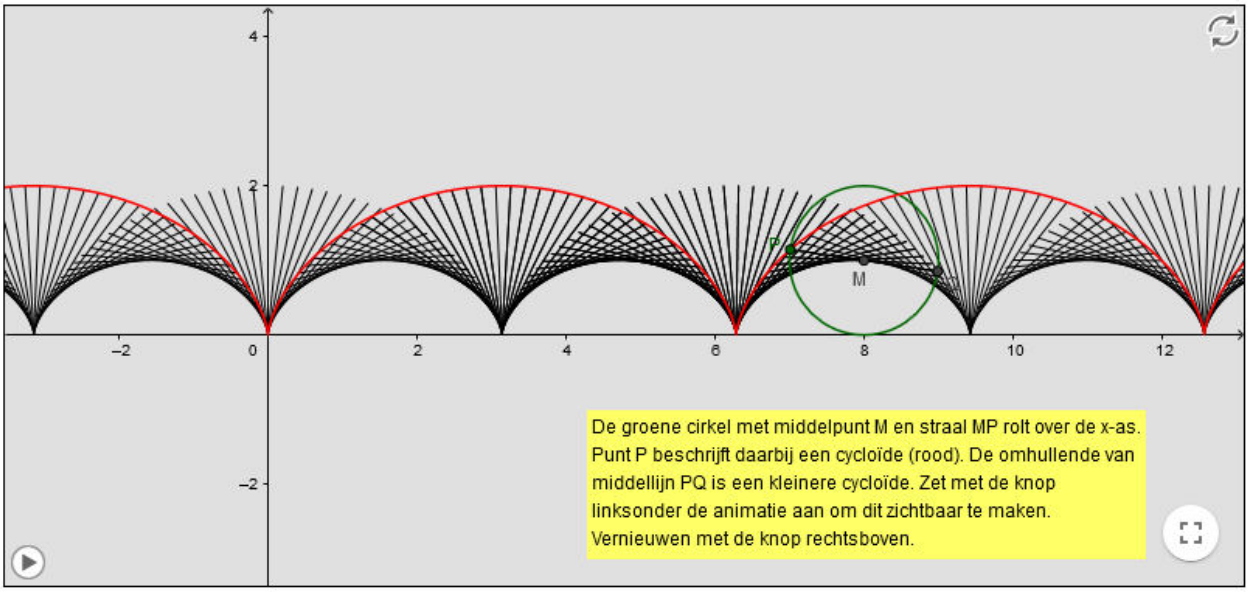
De omhullende van de middellijn van een rollende cirkel

Auteur: Rinse Poortinga



De omhullende van de middellijn van een rollende cirkel

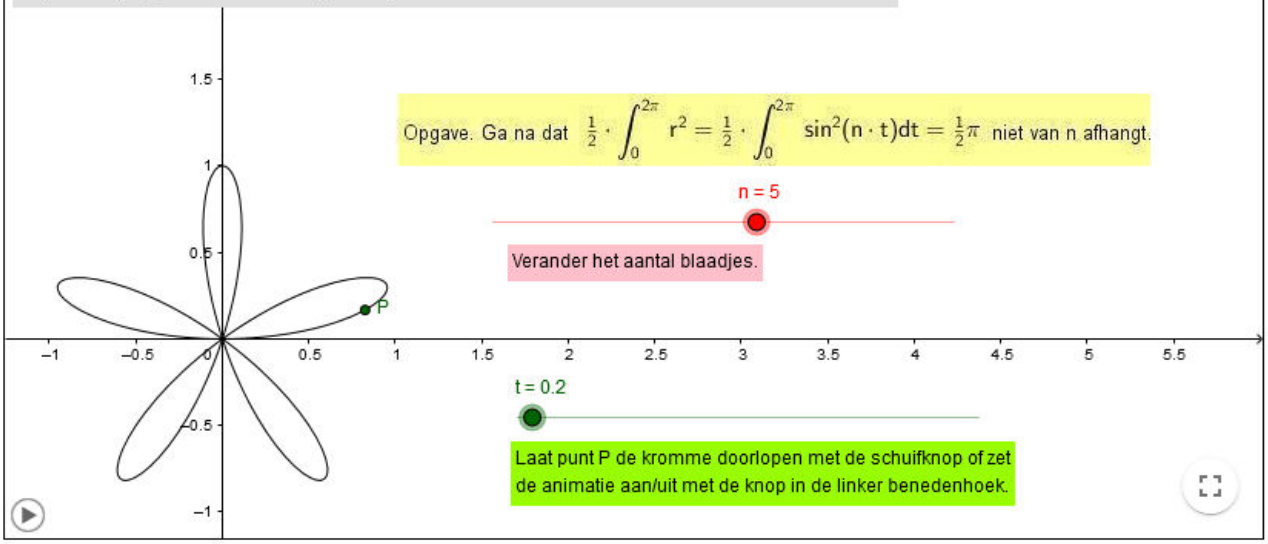
Auteur: Rinse Poortinga



Rozetten

Auteur: Rinse Poortinga

Punt P doorloopt een rozet. Op tijdstip t geldt xP=r(t)·cos(t), yP=r(t)·sin(t) met r(t)=sin(n·t), n=1,2,3,...,8 en 0≤t≤2π.
Als n oneven is, dan heeft de rozet n blaadjes en de kromme wordt 2 keer doorlopen, wanneer t toeneemt van 0 tot 2π.
Als n even is, dan heeft de rozet 2n blaadjes en de kromme wordt 1 keer doorlopen, wanneer t toeneemt van 0 tot 2π.
De gezamenlijk oppervlakte van de blaadjes is π/4, als n oneven is.
De gezamenlijk oppervlakte van de blaadjes is π/2, als n even is.

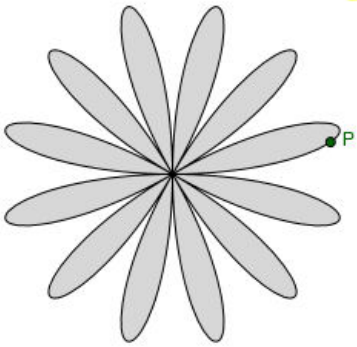


Rozetten

Auteur: Rinse Poortinga

Punt P doorloopt een rozet. Op tijdstip t geldt xP=r(t)·cos(t), yP=r(t)·sin(t) met r(t)=sin(n·t), n=1,2,3,...,8 en 0≤t≤2π.
Als n oneven is, dan heeft de rozet n blaadjes en de kromme wordt 2 keer doorlopen, wanneer t toeneemt van 0 tot 2π.
Als n even is, dan heeft de rozet 2n blaadjes en de kromme wordt 1 keer doorlopen, wanneer t toeneemt van 0 tot 2π.
De gezamenlijk oppervlakte van de blaadjes is π/4, als n oneven is.
De gezamenlijk oppervlakte van de blaadjes is π/2, als n even is.

Opgave. Ga na dat $\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(n \cdot t)dt = \frac{1}{2}\pi$ niet van n afhangt.



n = 6

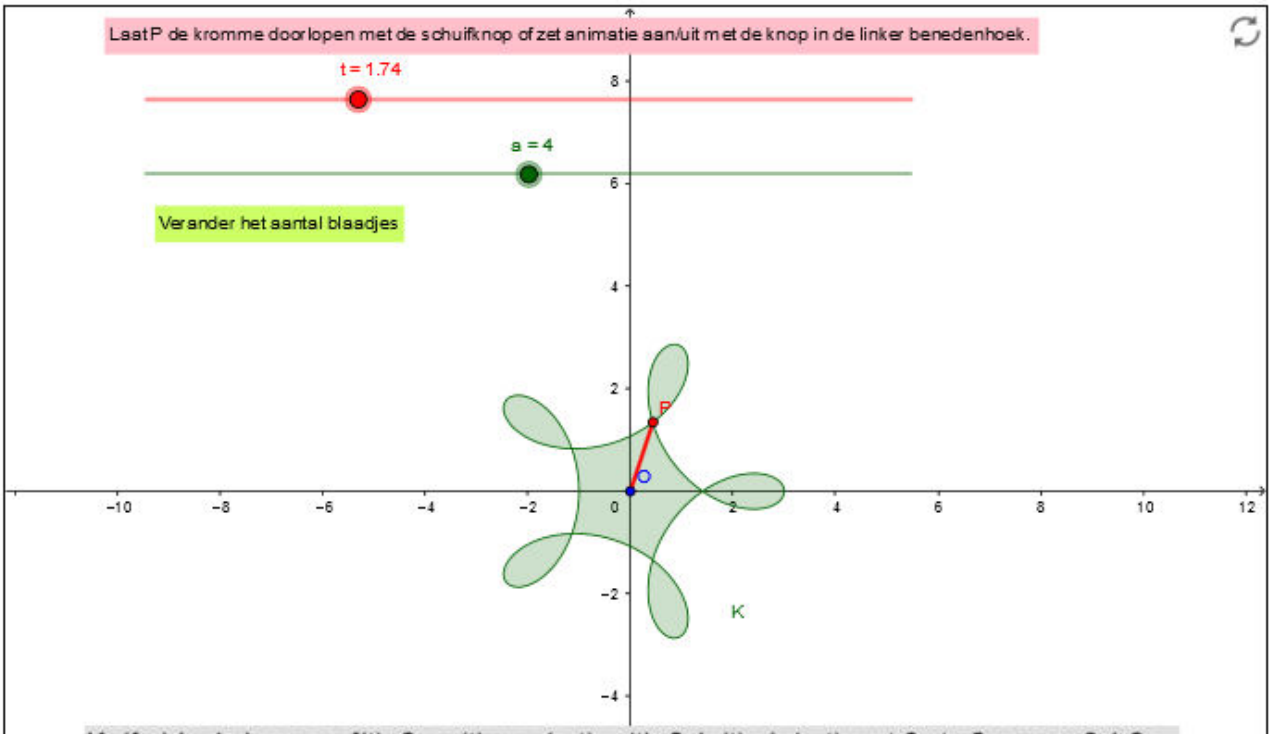
Verander het aantal blaadjes.

t = 0.2

Laat punt P de kromme doorlopen met de schuifknop of zet de animatie aan/uit met de knop in de linker benedenhoek.

Calypso en windingsgetal

Auteur: Rinse Poortinga



K=(f,g) is de kromme f(t)=2cos(t)+cos(a·t), g(t)=2sin(t)-sin(a·t) met $0 \le t \le 2\pi$ en a=0,1,2,...,
K verdeelt de punten in het vlak die niet op K liggen in aantal gebieden:
2 gebieden als a=0,1,2 en a+3 gebieden als a=3,4,...,8.
Het windingsgetal van het witte buitengebied t.o.v. K is 0.
Het windingsgetal van het centrale binnengebied is 1.
De gebieden binnen de blaadjes (als a=3,4,...,8) hebben windingsgetal -1 t.o.v. K.

De integraal $\int_K f\,dg = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g'(t)\,dt$ stelt de georiënteerde oppervlakte voor van de gesloten kromme K en is hier gelijk aan de oppervlakte van het centrale binnengebied met daarvan afgetrokken de oppervlakten van de blaadjes.
(Zie Meetkunde + Analyse, hfdst. 10.) Met QuickMath vinden we voor een bepaalde a gemakkelijk de exacte waarde van de integraal.

Lengte en georiënteerde oppervlakte van een kromme

Auteur: Rinse Poortinga

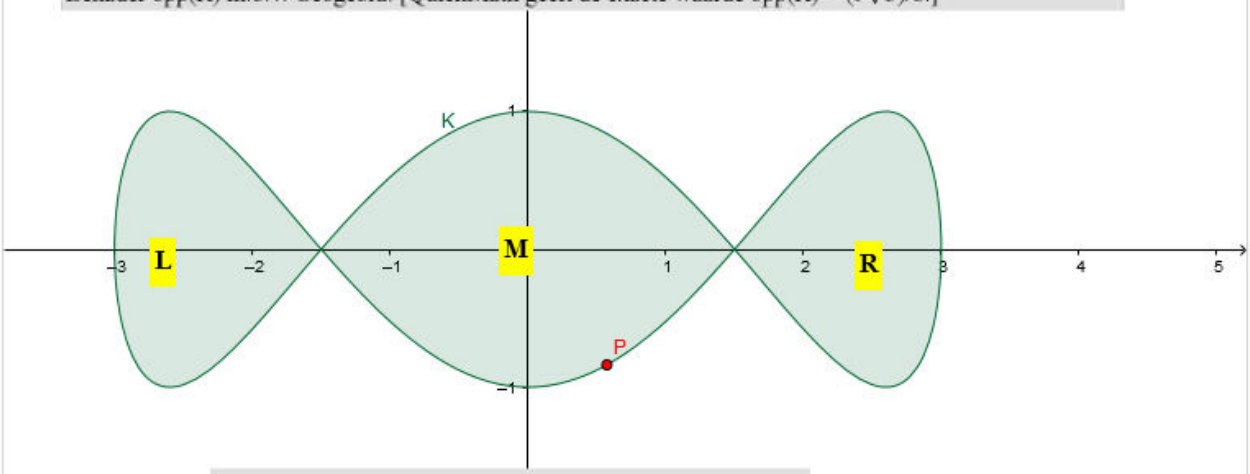
De gesloten kromme K=(f,g) met f(t)=3sin(t), g(t)=cos(3t), $0 \leq t \leq 2\pi$, verdeelt de punten die niet op K liggen in 4 gebieden: B (het witte buitengebeid) en de binnengebieden L (links), M (midden) en R (rechts).
De windingsgetallen van deze gebieden t.o.v. K zijn 0, 1, -1 resp. 1.

De integraal $\int_K f\,dg = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g'(t)\,dt =$ 0 is gelijk aan de georiënteerde oppervlakte van K.

Dus $\int_K f\,d\,g$ = opp(L) + opp(R) - opp(M).

Opp(R) = $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} f(t) \cdot g'(t)dt$ en opp(L) = opp(R) , dus opp(M) =2·opp(R).

Benader opp(R) m.b.v. Geogebra. [QuickMath geeft de exacte waarde opp(R) = $(9\sqrt{3})/8$.]



De snelheid van punt P op tijdstip t is gelijk aan v(t) = |K'(t)|.
De lengte van kromme K is gelijk aan

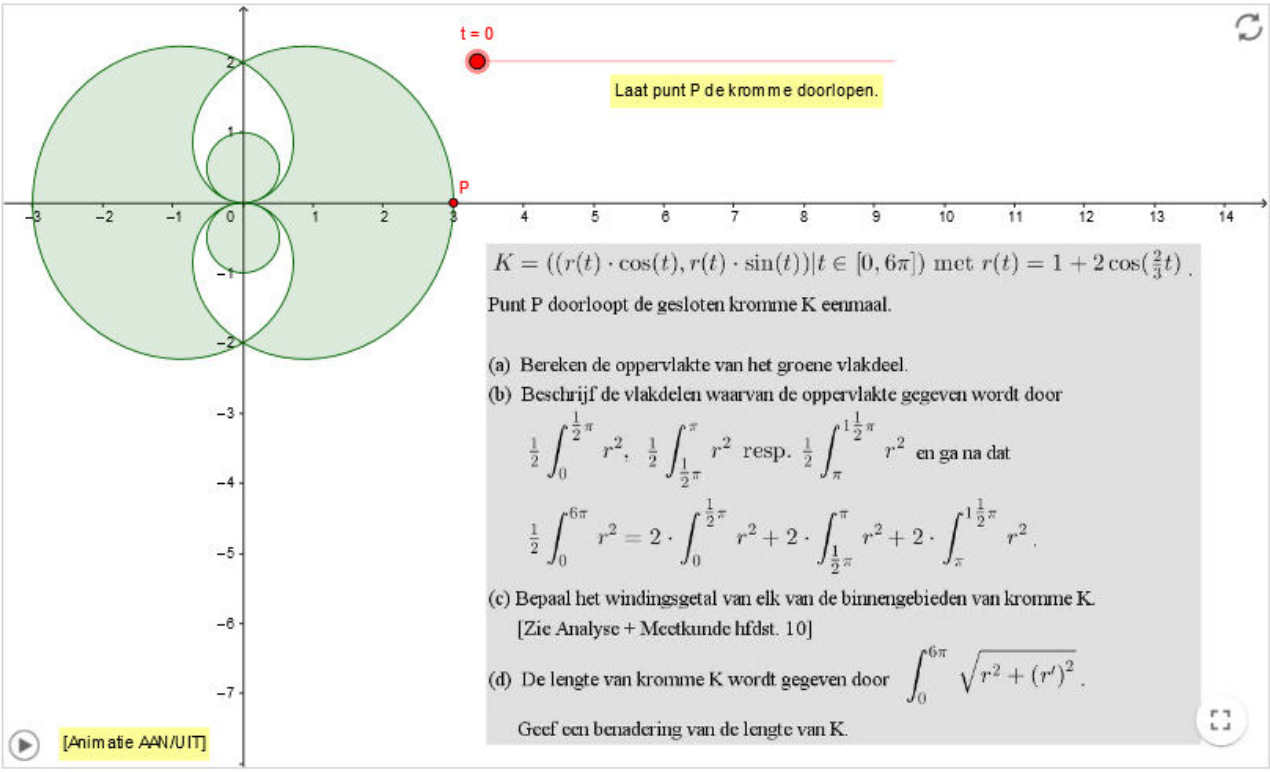
$$\int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt\,.$$

Benader deze lengte met Geogebra..

Zet de animatie aan om te zien hoe punt P zich over de kromme K beweegt bij toenemende parameter t.

Een kromme in poolcoördinaten

Auteur: Rinse Poortinga



$K = ((r(t)\cdot\cos(t), r(t)\cdot\sin(t)) | t \in [0, 6\pi])$ met $r(t) = 1 + 2\cos(\frac{2}{3}t)$.

Punt P doorloopt de gesloten kromme K eenmaal.

(a) Bereken de oppervlakte van het groene vlakdeel.

(b) Beschrijf de vlakdelen waarvan de oppervlakte gegeven wordt door

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2,\ \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} r^2 \text{ resp. } \frac{1}{2}\int_{\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} r^2 \text{ en ga na dat}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{6\pi} r^2 = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2 + 2\cdot\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} r^2 + 2\cdot\int_{\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} r^2.$$

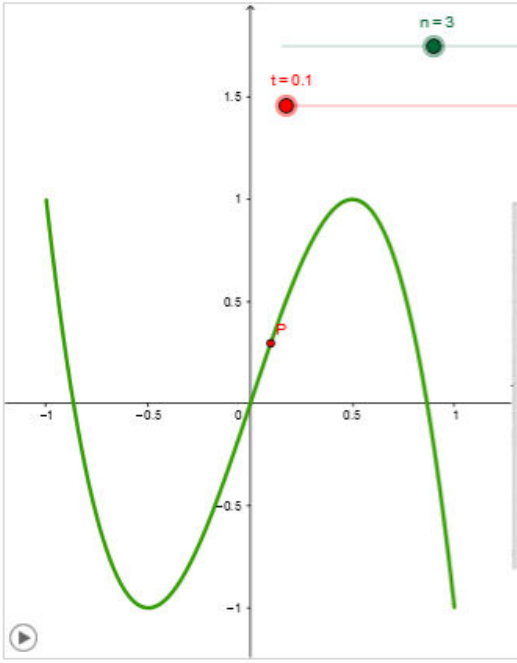
(c) Bepaal het windingsgetal van elk van de binnengebieden van kromme K.
[Zie Analyse + Meetkunde hfdst. 10]

(d) De lengte van kromme K wordt gegeven door $\int_0^{6\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}$.

Geef een benadering van de lengte van K.

Lissajousfiguur

Auteur: Rinse Poortinga



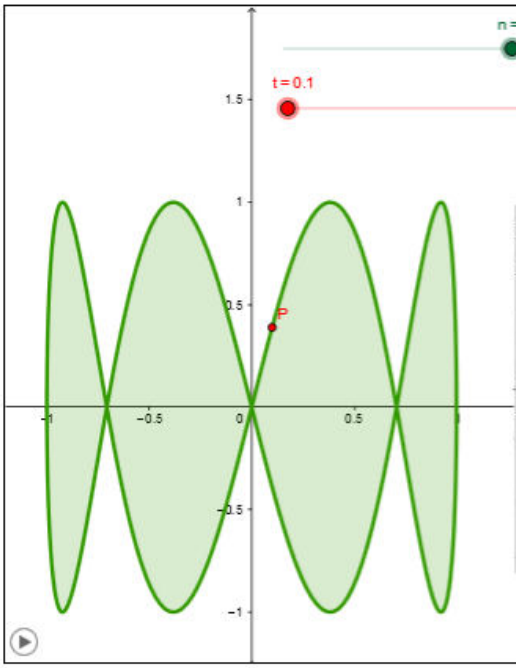
Punt P(x,y) met x = sin(t), y = sin(nt) en n ε {1,2,...,6} doorloopt een gesloten Lissajouskromme K, als t het parameterinterval [0,2π] doorloopt.
Als n oneven is, dan kunnen we met behulp van de stelling van de Moivre eenvoudig aantonen dat het spoor van K een deel van de grafiek van een n-de graads veeltermfunctie f is. Controleer bijv. dat $f(x) = -4x^3+3x$, als n=3.
K heeft geen binnengebieden als n oneven is. Als K even is, dan heeft K binnengebieden, sommige met windingsgetal 1 en andere met windingsgetal -1.

Ga na waarom de integraal $\int_K x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)\,d\sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N})$

de waarde 0 heeft.

Lissajousfiguur

Auteur: Rinse Poortinga

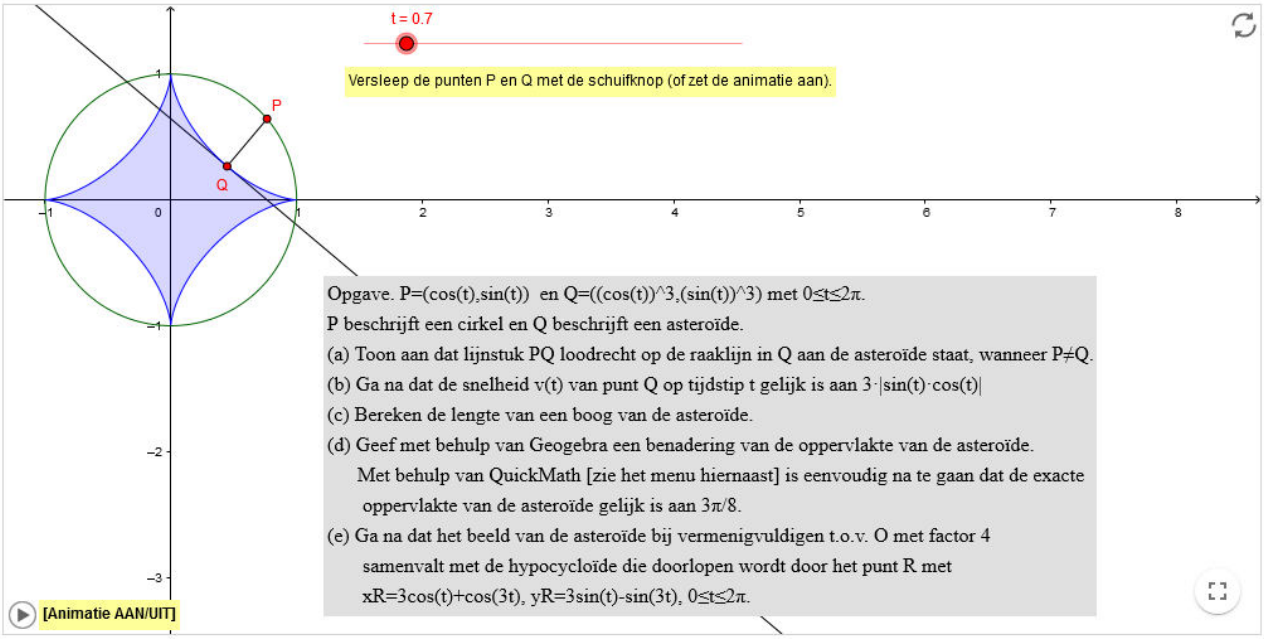


Punt P(x,y) met x = sin(t), y = sin(nt) en n ε {1,2,...,6} doorloopt een gesloten Lissajouskromme K, als t het parameterinterval [0,2π] doorloopt.
Als n oneven is, dan kunnen we met behulp van de stelling van de Moivre eenvoudig aantonen dat het spoor van K een deel van de grafiek van een n-de graads veeltermfunctie f is. Controleer bijv. dat $f(x) = -4x^3+3x$, als n=3.
K heeft geen binnengebieden als n oneven is. Als K even is, dan heeft K binnengebieden, sommige met windingsgetal 1 en andere met windingsgetal -1.

Ga na waarom de integraal $\int_K x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)\,d\,\sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N})$ de waarde 0 heeft.

Asteroïde

Auteur: Rinse Poortinga



Opgave. P=(cos(t),sin(t)) en Q=((cos(t))^3,(sin(t))^3) met $0 \le t \le 2\pi$.

P beschrijft een cirkel en Q beschrijft een asteroïde.

(a) Toon aan dat lijnstuk PQ loodrecht op de raaklijn in Q aan de asteroïde staat, wanneer $P \neq Q$.

(b) Ga na dat de snelheid v(t) van punt Q op tijdstip t gelijk is aan $3 \cdot |\sin(t) \cdot \cos(t)|$

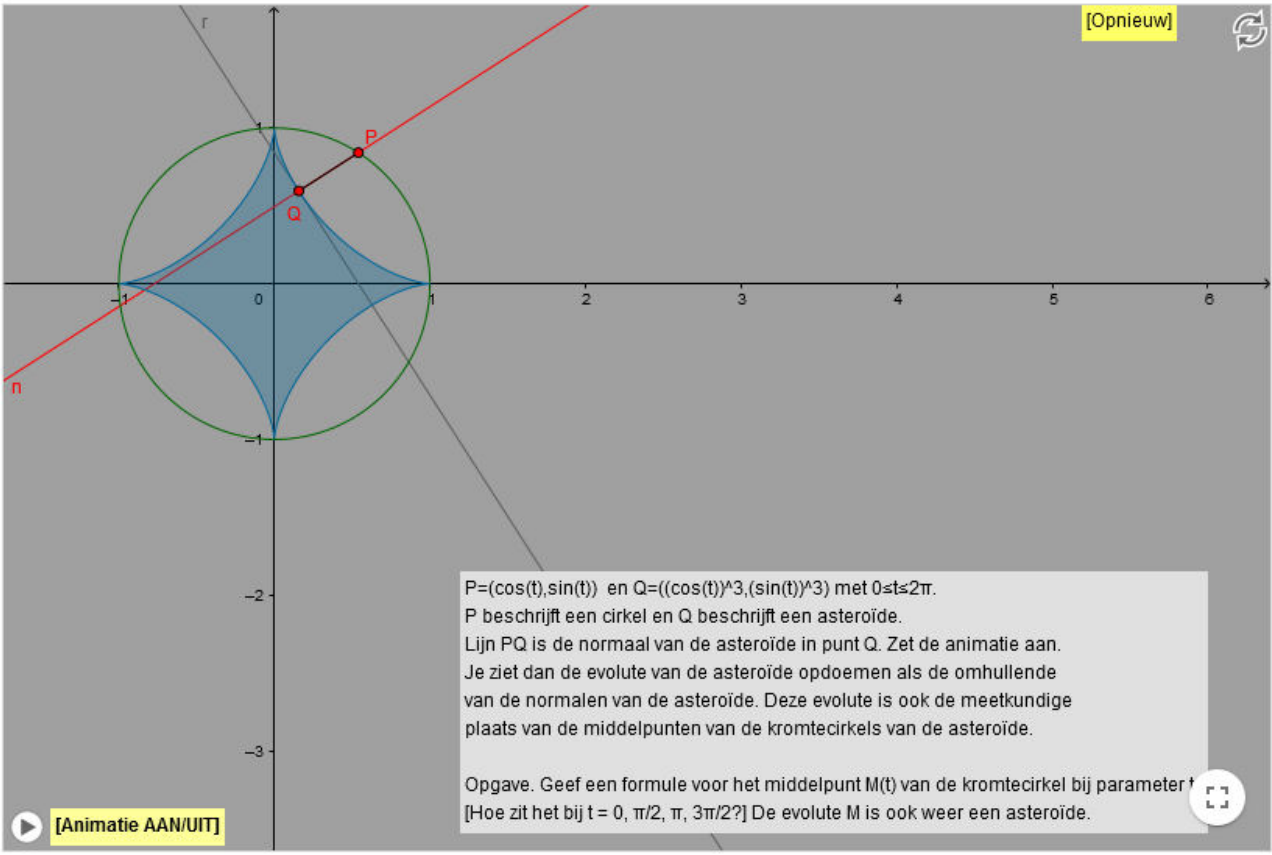
(c) Bereken de lengte van een boog van de asteroïde.

(d) Geef met behulp van Geogebra een benadering van de oppervlakte van de asteroïde.
Met behulp van QuickMath [zie het menu hiernaast] is eenvoudig na te gaan dat de exacte oppervlakte van de asteroïde gelijk is aan $3\pi/8$.

(e) Ga na dat het beeld van de asteroïde bij vermenigvuldigen t.o.v. O met factor 4 samenvalt met de hypocycloïde die doorlopen wordt door het punt R met
xR=3cos(t)+cos(3t), yR=3sin(t)-sin(3t), $0 \le t \le 2\pi$.

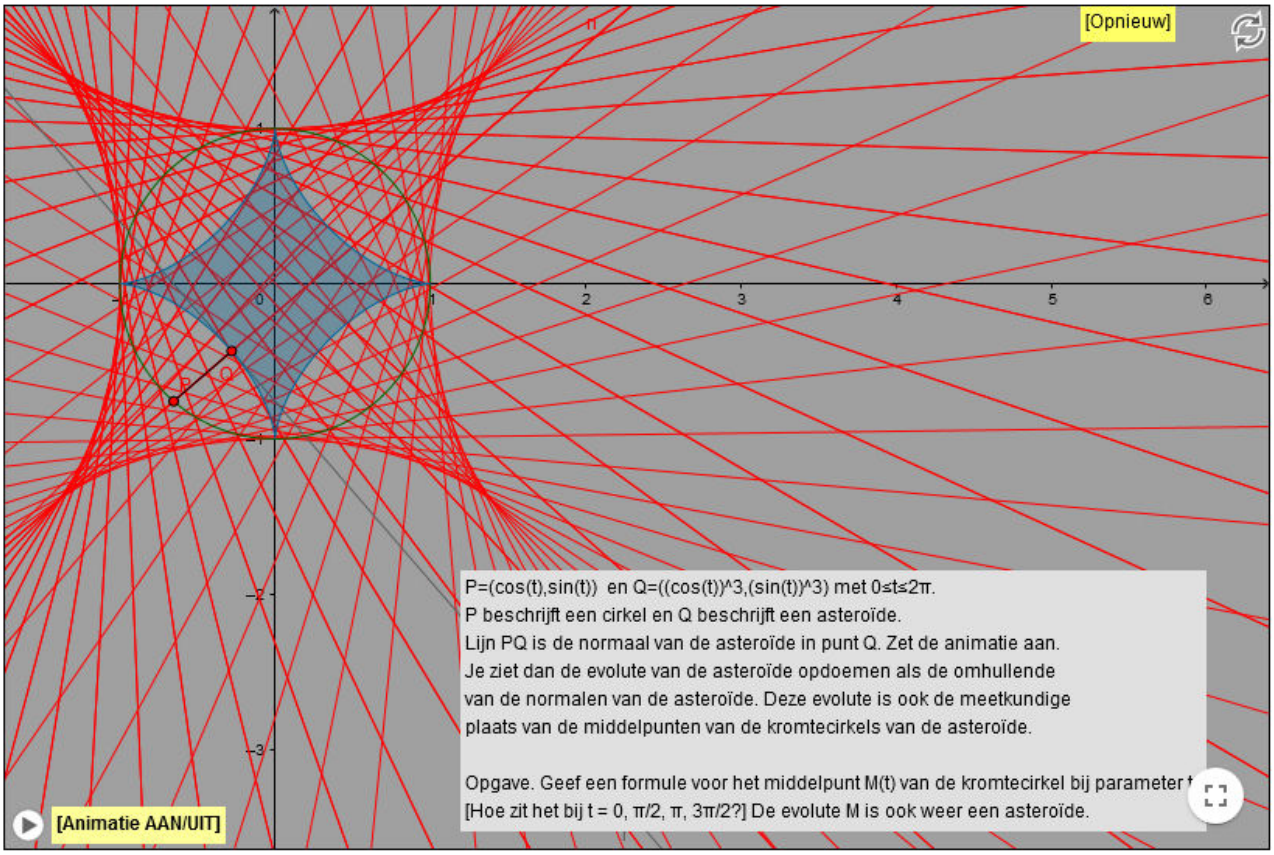
De evolute van een asteroïde

Auteur: Rinse Poortinga



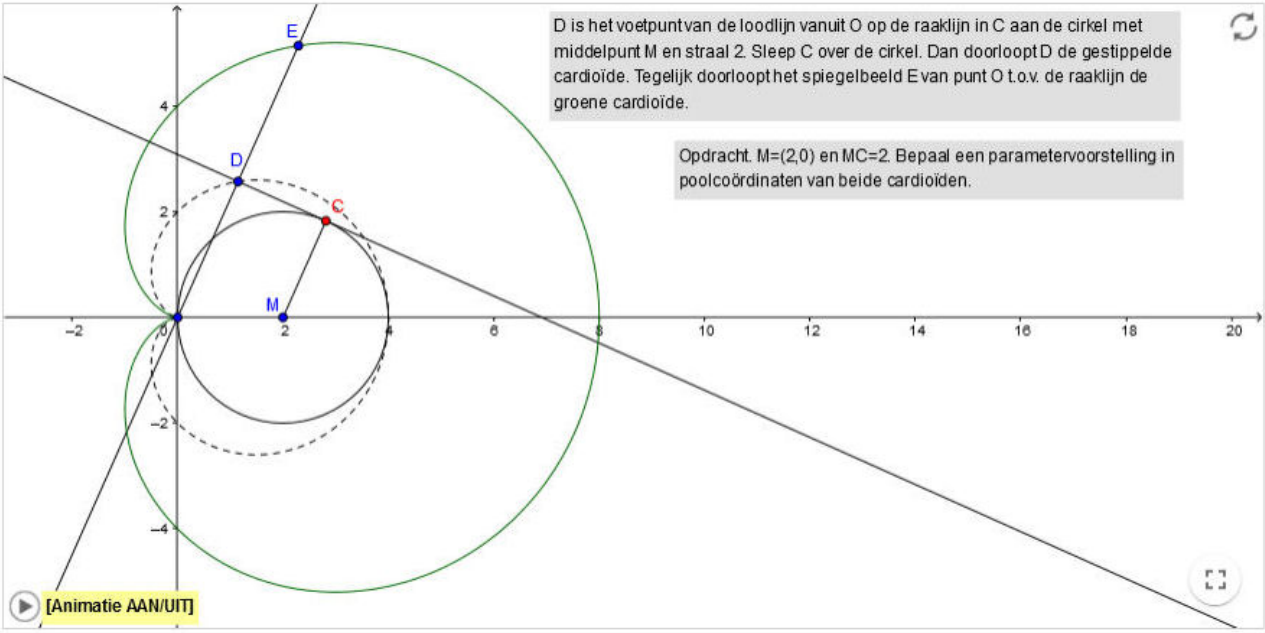
De evolute van een asteroïde

Auteur: Rinse Poortinga



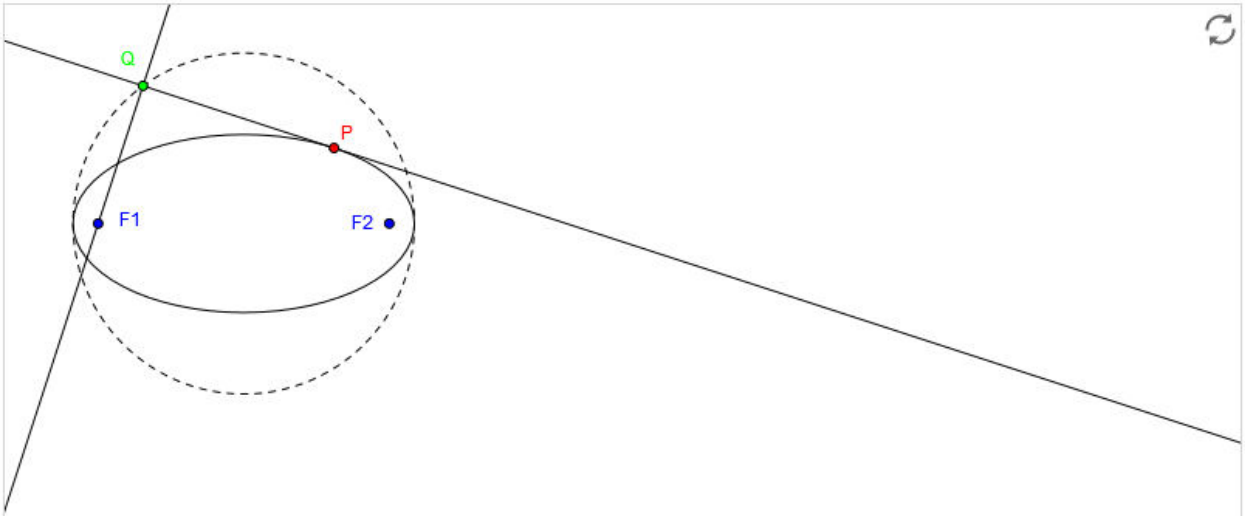
Cardioïde

Auteur: Rinse Poortinga



ellips en cirkel

Auteur: Rinse Poortinga

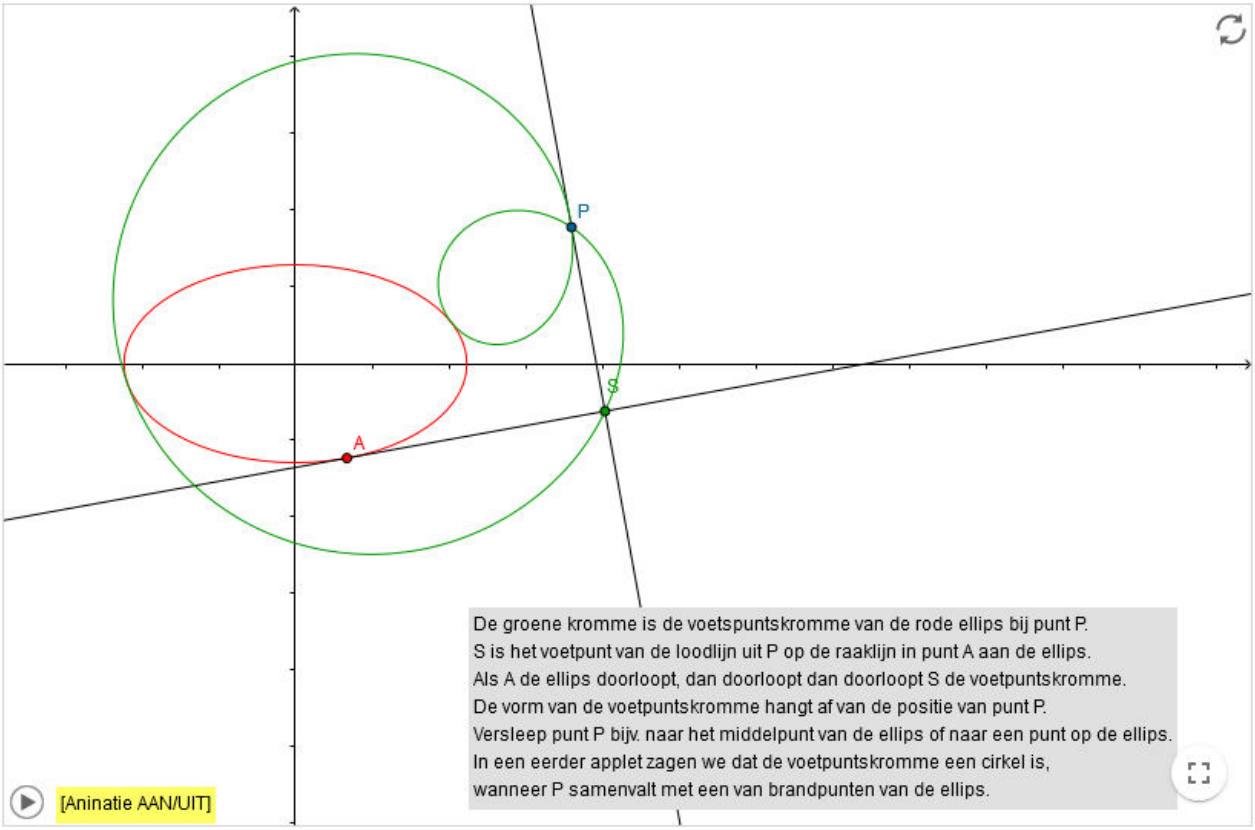


P doorloopt een ellips.
Q is het voetpunt van de loodlijn uit brandpunt F1 op de lijn die in P aan de ellips raakt.
Toon aan dat Q een cirkel doorloopt, wanneer P de ellips doorloopt.

[Animatie AAN/UIT]

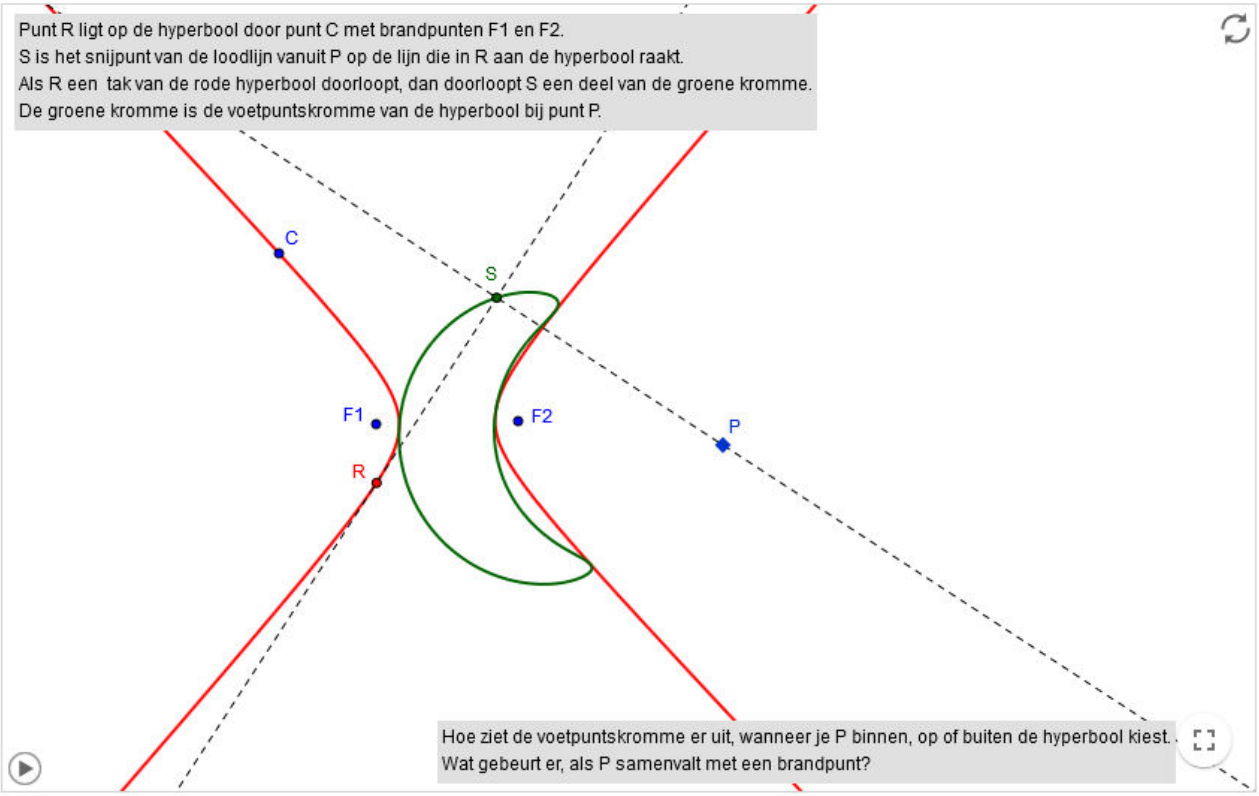
Voetpuntskrommen bij een ellips

Auteur: Rinse Poortinga



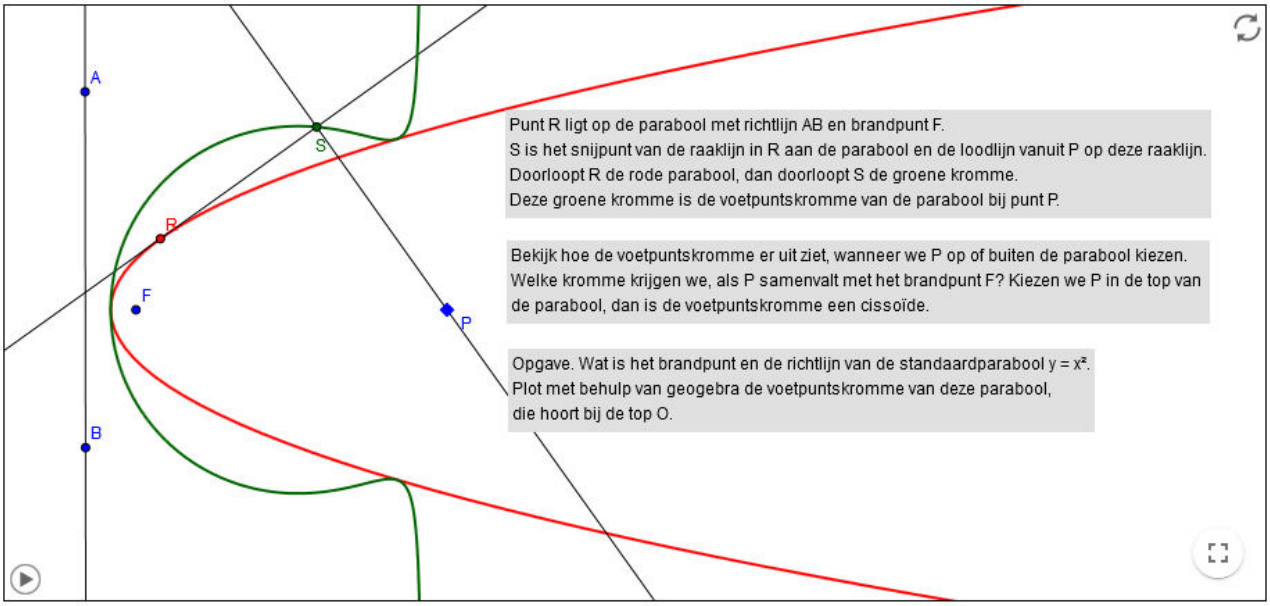
Voetpuntskrommen bij een hyperbool

Auteur: Rinse Poortinga



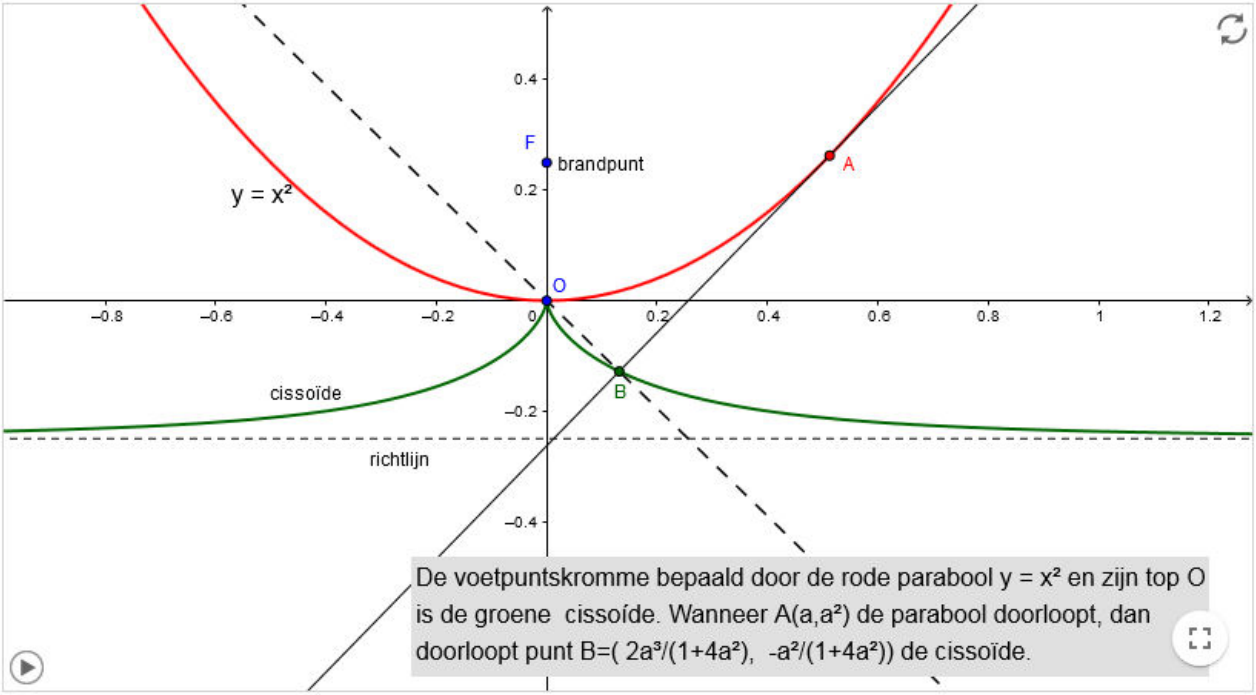
De voetpuntskrommen van een parabool

Auteur: Rinse Poortinga



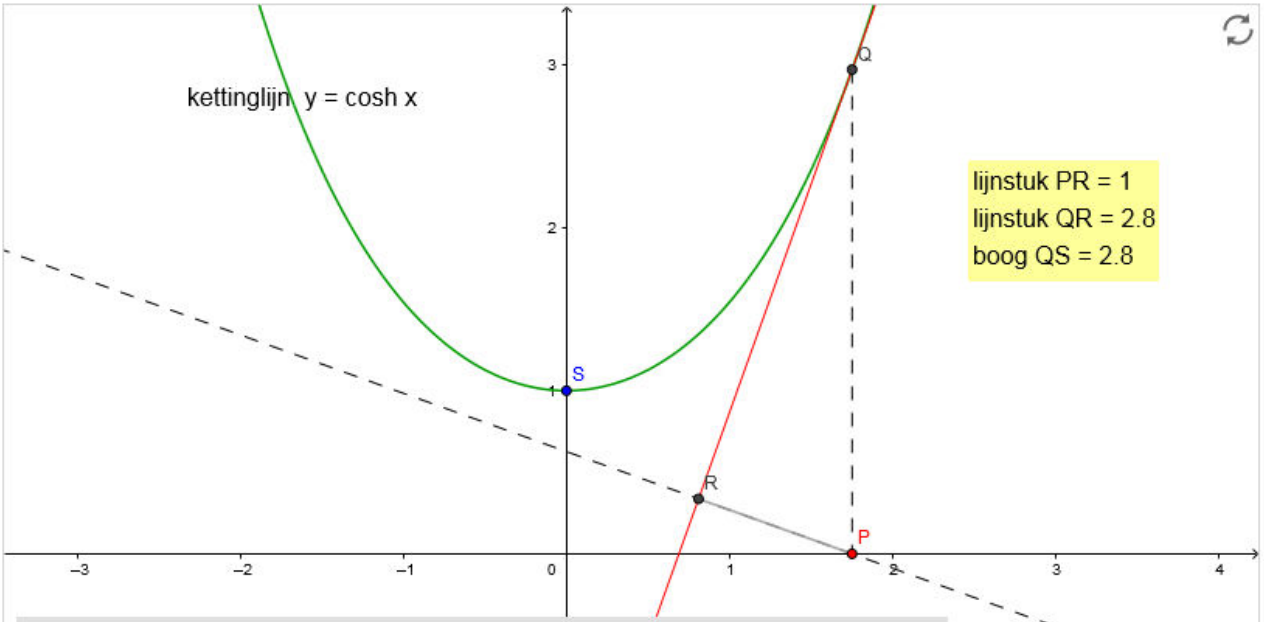
Cissoïde

Auteur: Rinse Poortinga



Kettinglijn en tractrix

Auteur: Rinse Poortinga



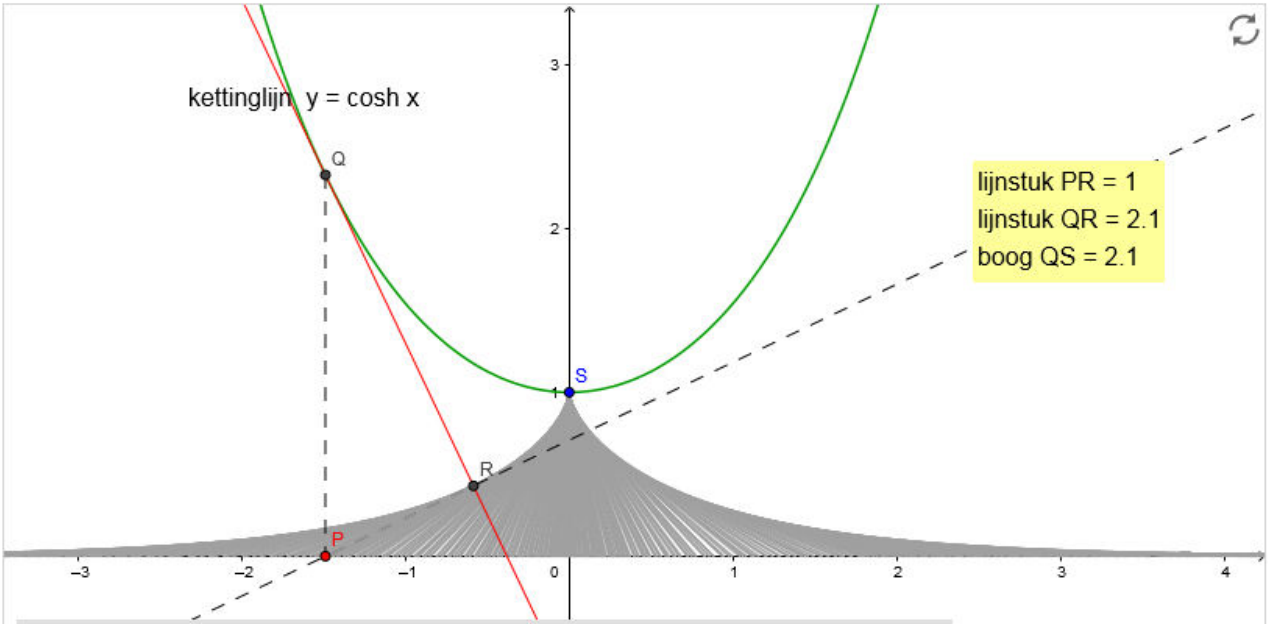
De groene kromme is de grafiek van f(x)=cosh x = (e^x+e^(-x))/2. Deze grafiek staat bekend als de kettinglijn. Het is de vorm die een vrijhangende ketting aanneemt. Punt P beweegt over de x-as. Punt Q is het bijbehorend punt op de grafiek, QR is de raaklijn en PR staat loodrecht op deze raaklijn. Slepen we punt P over de x-as, dan blijft de lengte van PR gelijk aan 1. Verder is de lengte van boog QS van de kromme altijd gelijk aan de lengte van lijnstuk QR. De omhullende van de lijnstukken PR is de zgn 'sleepkromme' of tractrix. De lijnen PR zijn raaklijnen van de tractrix. De kettinglijn is de evolute van de tractrix ofwel de omhullende van de normalen van de tractrix. Zet de animatie aan om dit te zien.

[Animatie AAN/UIT]

Zie ook het PDF-document 'Meer over krommen'.

Kettinglijn en tractrix

Auteur: Rinse Poortinga



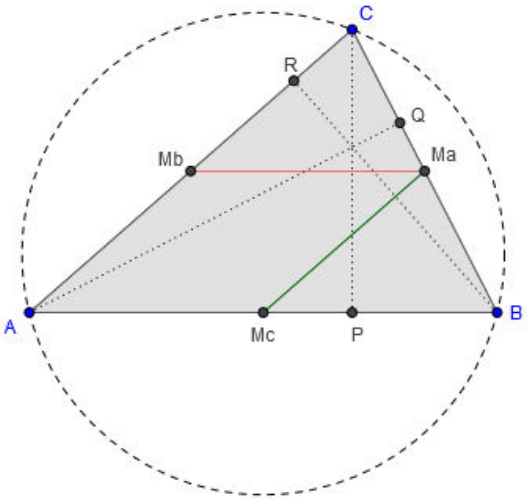
De groene kromme is de grafiek van f(x)=cosh x = (e^x+e^(-x))/2. Deze grafiek staat bekend als de kettinglijn. Het is de vorm die een vrijhangende ketting aanneemt. Punt P beweegt over de x-as. Punt Q is het bijbehorend punt op de grafiek, QR is de raaklijn en PR staat loodrecht op deze raaklijn. Slepen we punt P over de x-as, dan blijft de lengte van PR gelijk aan 1. Verder is de lengte van boog QS van de kromme altijd gelijk aan de lengte van lijnstuk QR. De omhullende van de lijnstukken PR is de zgn 'sleepkromme' of tractrix. De lijnen PR zijn raaklijnen van de tractrix. De kettinglijn is de evolute van de tractrix ofwel de omhullende van de normalen van de tractrix. Zet de animatie aan om dit te zien.

[Animatie AAN/UIT]

Zie ook het PDF-document 'Meer over krommen'.

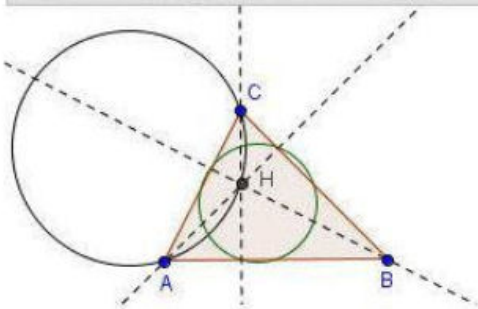
Negenpuntscirkel

Auteur: Rinse Poortinga



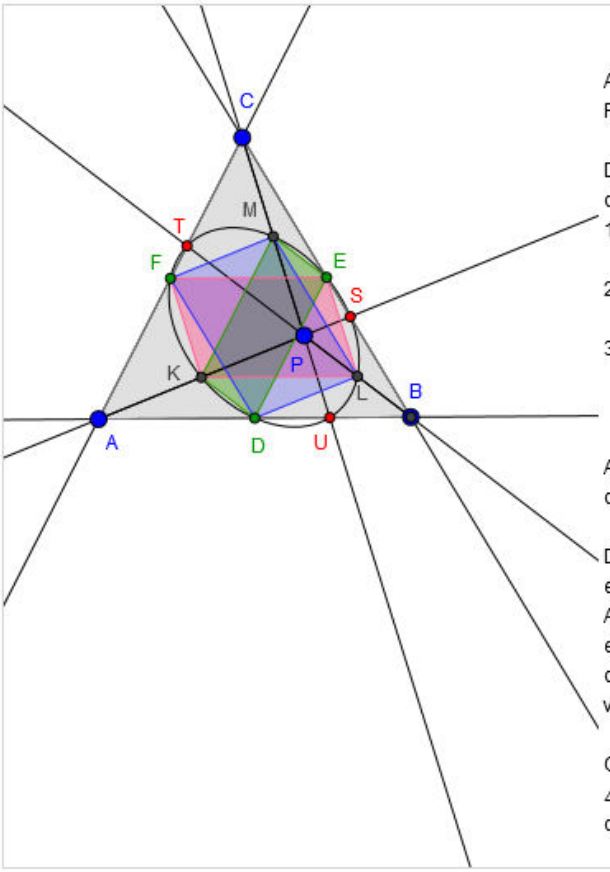
H is het hoogtepunt van ΔABC. Vermenigvuldig de omgeschreven cirkel van ΔABC vanuit H met factor 1/2.
De beeldcirkel gaat dan uiteraard door de middens D, E en F van de lijnstukken HA,HC en HB.
We gaan na dat deze cirkel door de middens Ma, Mb en Mc van de zijden van ΔABC gaat.
Ook de voetpunten P, Q en R van de hoogtelijnen van ΔABC liggen op deze cirkel.
De beeldcirkel wordt daarom de negenpuntscirkel genoemd.
Is M het middelpunt van de omgeschreven cirkel, dan is het midden N van lijnstuk HM het middelpunt van de negenpuntscirkel.
Bewijs dit als volgt:
(a) Toon aan dat de groene vierhoek D(Mc)(Ma)F een rechthoek is.
(b) Ook de rode vierhoek DE(Ma)(Mb) is een rechthoek.
(c) Beide rechthoeken hebben diagonaal D(Ma) gemeen.
Hieruit volgt dat de cirkel door D, E en F ook door Ma, Mb en Mc gaat.
(d) F(Mc) is een middellijn van de cirkel door D,E en F, ∠(Mc)PF is een rechte hoek,
Dus ook P ligt op de negenpuntscirkel. Op soortgelijke manier bewijs je dat Q en R op deze cirkel liggen.

Opgave. H is het hoogtepunt van ΔABC. Ga na dat B het hoogtepunte van ΔAHC is.
Vermenigvuldig de omgeschreven cirkel van ΔAHC t.o.v. B met factor 1/2.
Dat geeft de negenpuntscirkel van ΔAHC. Toon aan dat deze samenvalt met de negenpuntscirkel van ΔABC.



Negenpuntskegelsnede

Auteur: Rinse Poortinga



ABC is een driehoek.
Punt P ligt niet op een zijde van de driehoek.

De negenpuntskegelsnede bepaald door
de △ABC en punt P gaat
1. door de groene middens D, E en F
van de zijden AB, BC en CA van de driehoek,
2. door de zwarte middens K, L en M
van de lijnstukken PA, PB en PC,
3. door de rode snijpunten S, T, U van de lijnen
PA, PB en PC met de zijden van △ABC
(opgevat als lijnen).

Als P het hoogtepunt van △ABC is,
dan is de kegelsnede de negenpuntscirkel van △ABC.

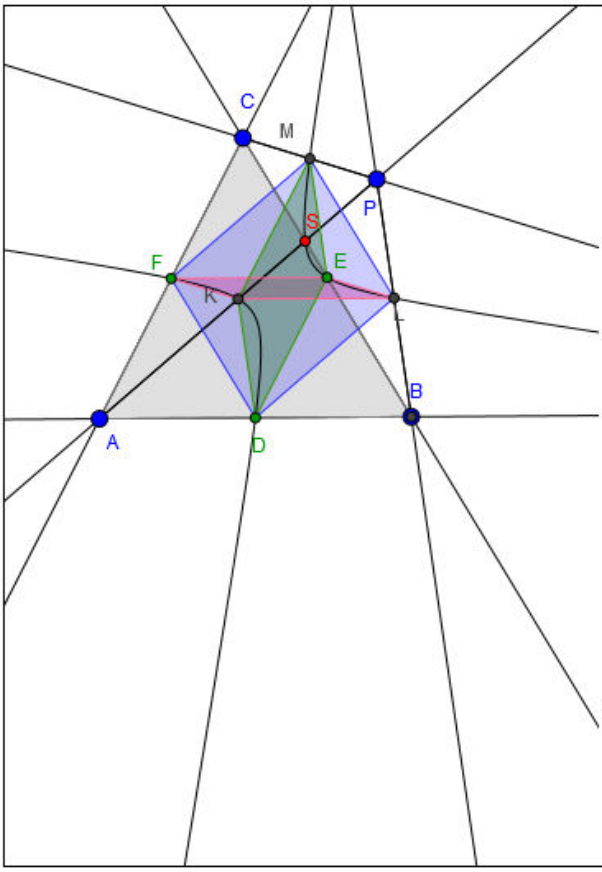
De zijden van driehoek ABC vatten we op als lijnen
en niet als lijnstukken. Deze zijden verdelen het vlak in 7 gebieden.
Afhankelijk van het gebied waarin P ligt, is de kegelsnede
een ellips of een hyperbool. Versleep P om dit te zien. Elke keer
dat P een zijde passeert verandert de kegelsnede
van een ellips in een hyperbool of omgekeerd.

Ga na de negenpuntskegelsnede bepaald door
△ABP en punt C dezelfde kegelsnede
oplevert als die van △ABC en punt P.

Voor bewijzen met behulp van Pascal zie het pdf-document
Pascal en de negenpuntskegelsnede.

Negenpuntskegelsnede

Auteur: Rinse Poortinga



ABC is een driehoek.
Punt P ligt niet op een zijde van de driehoek.

De negenpuntskegelsnede bepaald door
de △ABC en punt P gaat
1. door de groene middens D, E en F
van de zijden AB, BC en CA van de driehoek,
2. door de zwarte middens K, L en M
van de lijnstukken PA, PB en PC,
3. door de rode snijpunten S, T, U van de lijnen
PA, PB en PC met de zijden van △ABC
(opgevat als lijnen).

Als P het hoogtepunt van △ABC is,
dan is de kegelsnede de negenpuntscirkel van △ABC.

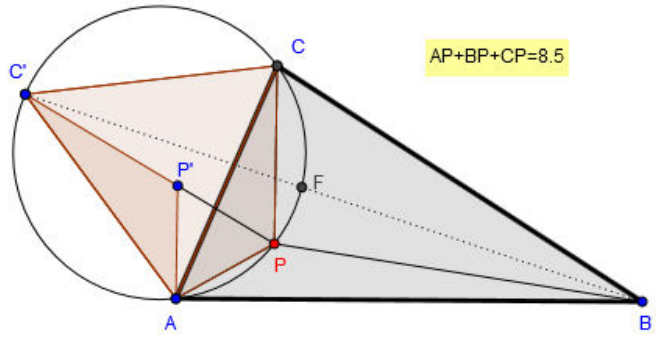
De zijden van driehoek ABC vatten we op als lijnen
en niet als lijnstukken. Deze zijden verdelen het vlak in 7 gebieden.
Afhankelijk van het gebied waarin P ligt, is de kegelsnede
een ellips of een hyperbool. Versleep P om dit te zien. Elke keer
dat P een zijde passeert verandert de kegelsnede
van een ellips in een hyperbool of omgekeerd.

Ga na de negenpuntskegelsnede bepaald door
△ABP en punt C dezelfde kegelsnede
oplevert als die van △ABC en punt P.

Voor bewijzen met behulp van Pascal zie het pdf-document
Pascal en de negenpuntskegelsnede.

Het punt van Fermat

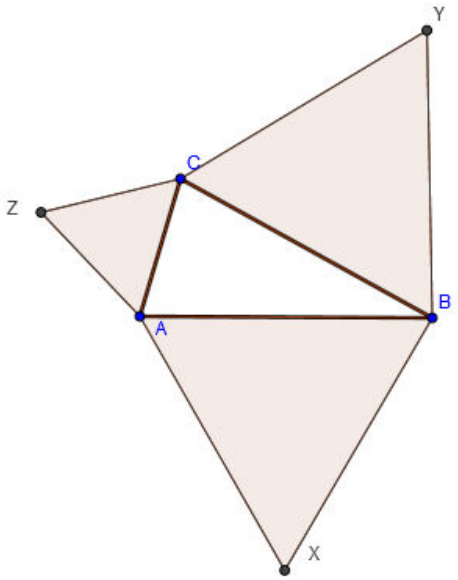
Auteur: Rinse Poortinga



De hoeken van ΔABC zijn kleiner dan 120°. Binnen △ABC nemen we een punt P.
Hoe moeten we P kiezen opdat AP+BP+CP minimaal is?
We roteren daartoe △APC over 60° tegen de klok in om punt A.
Dan zijn △APP' en △ACC' gelijkzijdig. Verder geldt AP+CP+BP=PP'+C'P'+BP.
Opdat deze som zo klein mogelijk is moeten C', P', P en B op een lijn liggen.
Dat is het geval als ∠C'P'A=∠CPA=∠APB=120°. Dan ook ∠BPC=120°.
Punt P valt in dat geval samen met het snijpunt F van lijnstuk C'B met de omgeschreven cirkel van △ACC'.
Dit punt F heet het punt van Fermat van △ABC. F wordt ook wel het punt van Torricelli genoemd.

Stelling van Napoleon

Auteur: Rinse Poortinga

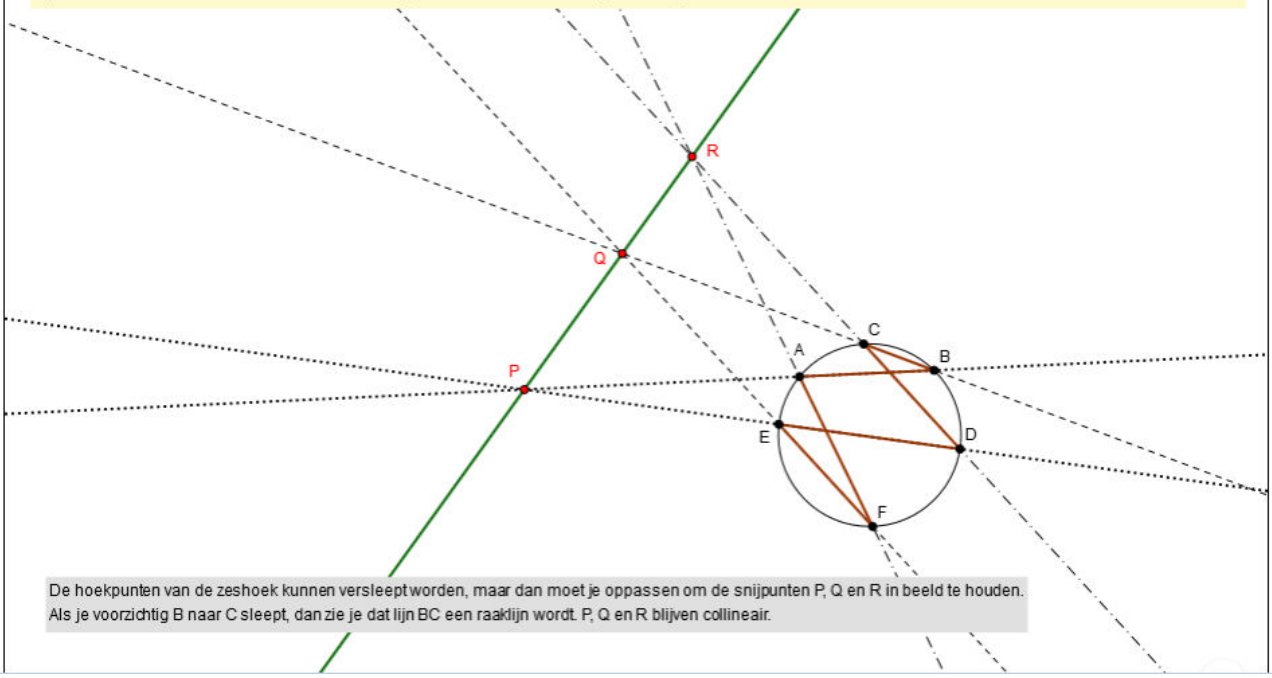


De driehoeken ABX, BCY en CAZ zijn gelijkzijdig.
P, Q en R zijn de middelpunten van de omgeschreven cirkels van deze driehoeken. Opgave:
Toon aan dat ΔPQR gelijkzijdig is. (F is het punt van Fermat van ΔABC.)

De stelling van Pascal

Auteur: Rinse Poortinga

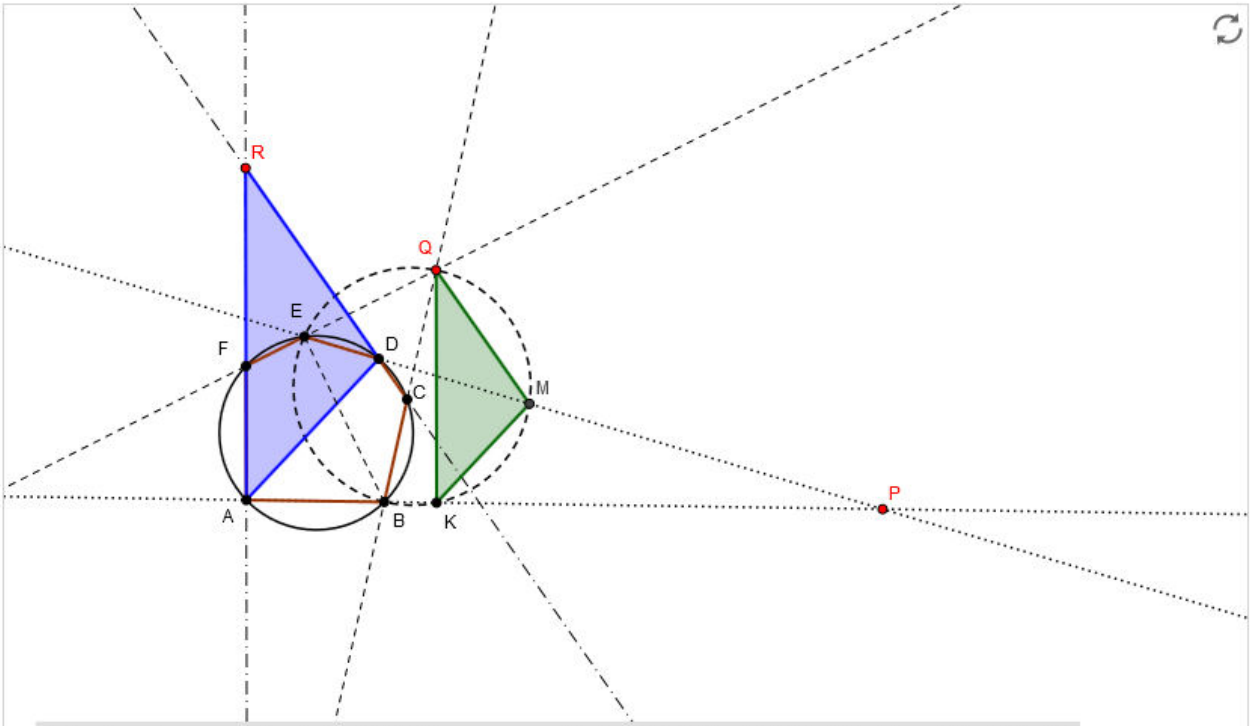
Stelling van Pascal. De hoekpunten A, B, C, D, E en F van een zeshoek (die zichzelf mag doorsnijden) liggen op een cirkel.
Dan liggen volgens de stelling van Pascal de snijpunten P, Q en R van de drie paren overstaande zijden op een rechte lijn.
De snijpunten P, Q of R hoeven overigens niet te bestaan. Dit laatste is het geval als één of meer paren overstaande zijden evenwijdig zijn.
Soms is het verhelderend om ons voor te stellen dat een paar evenwijdige lijnen een oneindig ver snijpunt heeft. Verder spreekt men dan af dat alle oneindig verre punten op een lijn liggen, de oneindig verre lijn. We krijgen dan o.a. als speciaal geval: als twee paar overstaande zijden van de zeshoek evenwijdig zijn, dan is het derde paar het ook (denk bijv aan de regelmatige zeshoek). Een ander speciaal geval:
Als bijv. AF en CD evenwijdig zijn, dan is R een oneindig ver punt en lijn PQ is dan evenwijdig met AF en CD. Als twee hoekpunten van de zeshoek samenvallen dan nemen we de raaklijn in deze samenvallende punten als de verbindingslijn. De stelling van Pascal voor een cirkel is een speciaal geval van de algemenere stelling van Pascal, waarin de hoekpunten van de zeshoek op een willekeurige (mogelijk ontaarde) kegelsnede kunnen liggen. Dat dit in elk geval geldt voor een ellips, is eenvoudig in te zien: In 7.10.1 van Analyse + Meetkunde hebben we een ellips gedefinieerd als het beeld van de eenheidscirkel onder een affiene transformatie van het vlak. Bij een affiene transformatie gaan lijnen over in lijnen: snijdende lijnen in snijdende lijnen en evenwijdige lijnen in evenwijdige lijnen.
In de driedimensionale ruimte kunnen we ook een punt O nemen buiten het vlak V van de cirkel en dan de cirkel projecteren op een ander vlak W dat niet door O gaat. Afhankelijk van de stand van vlak W kan de cirkel daarbij overgaan in een ellips, hyperbool of parabool in vlak W (denk aan de betekenis van het woord kegelsnede). Op deze manier kunnen we aantonen dat de stelling van Pascal voor iedere kegelsnede geldt.



De hoekpunten van de zeshoek kunnen versleept worden, maar dan moet je oppassen om de snijpunten P, Q en R in beeld te houden.
Als je voorzichtig B naar C sleept, dan zie je dat lijn BC een raaklijn wordt. P, Q en R blijven collineair.

Pascal bewezen door van IJzeren

Auteur: Rinse Poortinga

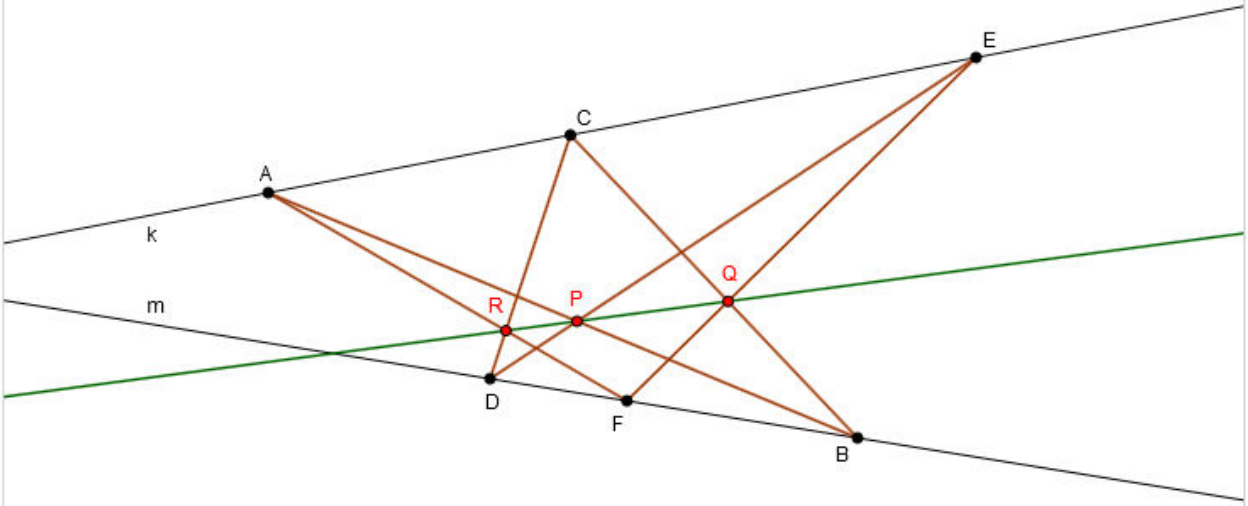


De hoekpunten van zeshoek ABCDEF liggen op een cirkel, AB ∧ DE = P, BC ∧ EF = Q en CD ∧ FA = R. De andere cirkel is de cirkel door E, B en Q. De lijnen AB en DE snijden de andere cirkel behalve in E en B ook nog in K resp. M. Met behulp van gelijke omtrekshoeken kunnen we aantonen dat RA || QK, AD || KM en RD || QM. Daaruit volgt dat de verbindingslijnen AK, DM en QR van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan of evenwijdig zijn. Dat laatste is hier niet geval, want DM ∧ AK = P en dus gaat ook QR door P. Daarmee is dan de stelling van Pascal voor een cirkel bewezen. [Dit bewijs is van Jan van IJzeren (1914-1998), een Nederlandse wiskundige, die in 1987 op 73-jarige leeftijd in Budapest nog promoveerde in de economie.]

De stelling van Pappus

Auteur: Rinse Poortinga

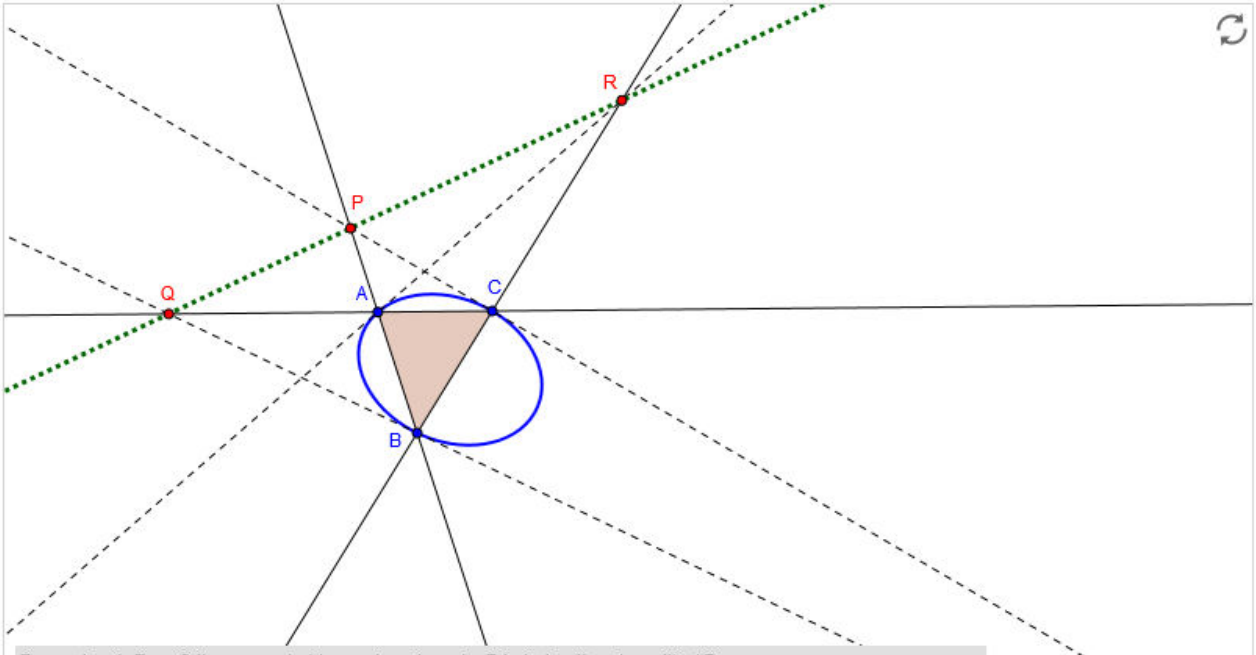
Als de opeenvolgende hoekpunten A, B, C, D, E en F van een zeshoek afwisselend op twee lijnen k en m liggen, dan liggen volgens de stelling van Pappus de snijpunten P = AB∧DE, Q = BC∧EF en R = CD∧FA van de overstaande zijden van de zeshoek op één lijn. Twee lijnen, snijdend of evenwijdig, worden als een ontaarde kegelsnede beschouwd. Zo gezien is de stelling van Pappus (300 v. Chr) een uitbreiding van de stelling van Pascal (1640 n. Chr) naar ontaarde kegelsneden. (Merk op dat we twee evenwijdige lijnen als een kegelsnede kunnen zien, wanneer we een cilinder opvatten als een ontaarde kegel.)



Opmerking. Bij verslepen van de hoekpunten van de zeshoek of van de lijnen k en m kunnen één of meer van de snijpunten P, Q of R verdwijnen. Dat komt doordat P, Q en R hier voor de duidelijkheid geconstrueerd zijn als snijpunten van lijnstukken. We moeten echter de zijden van de zeshoek niet als lijnstukken, maar als lijnen opvatten.

Punten op één lijn

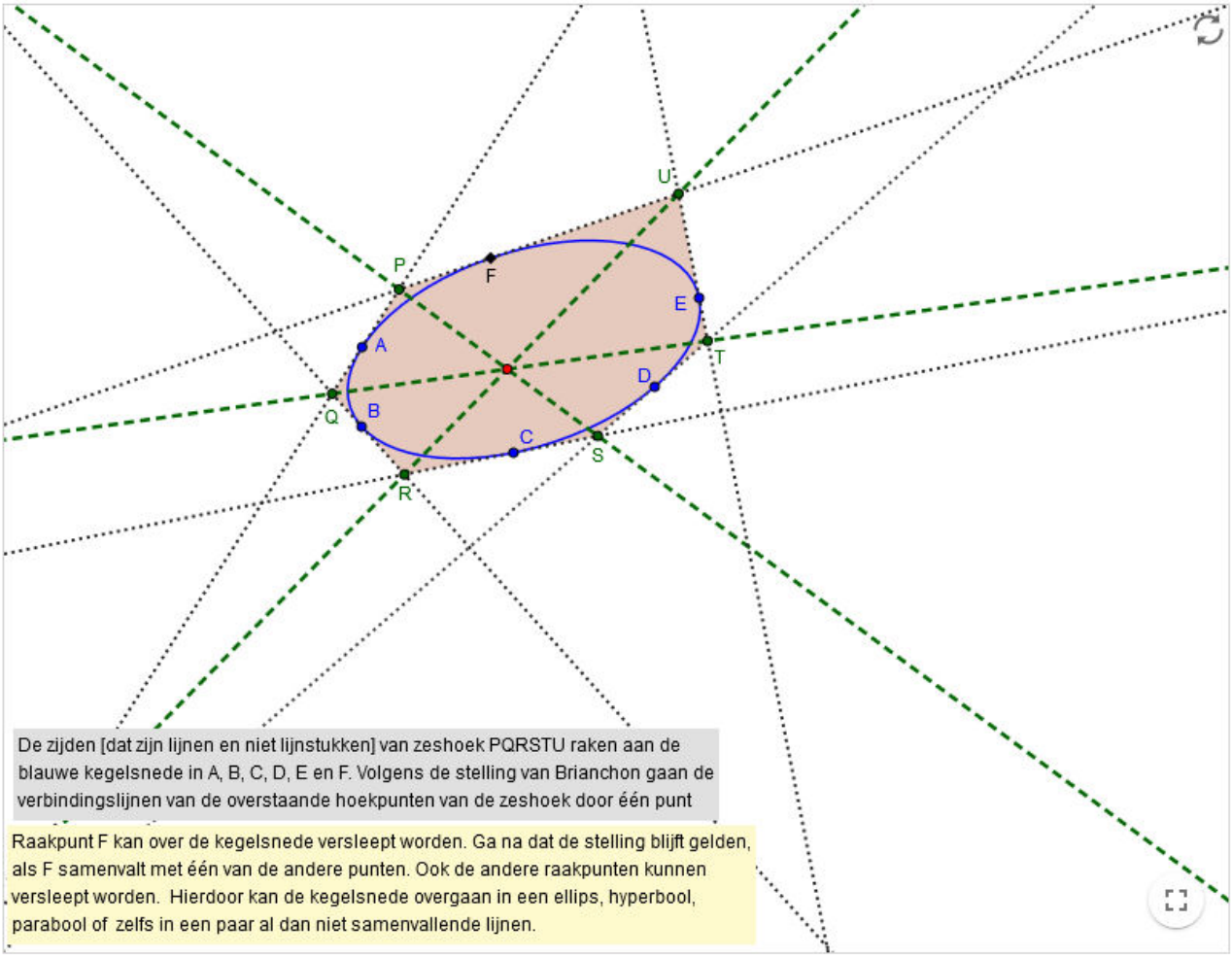
Auteur: Rinse Poortinga



De punten A, B en C liggen op de blauwe kegelsnede. P is het snijpunt van lijn AB met de raaklijn in C. Q is het snijpunt van lijn AC met de raaklijn in B en R is het snijpunt van lijn BC met de raaklijn in A. De hoekpunten van driehoek ABC kunnen versleept worden. Daarbij verandert de vorm van de kegelsnede. De kegelsnede kan overgaan in een hyperbool of parabool. De punten P, Q en R liggen steeds op één lijn. Deze eigenschap kan gezien worden als een speciaal geval van de stelling van Pascal, waarbij drie keer twee punten van de zeshoek samenvallen. Als verbindingslijn van twee samengevallen punten op de kegelsnede nemen we de raaklijn aan de kegelsnede.

De stelling van Brianchon

Auteur: Rinse Poortinga

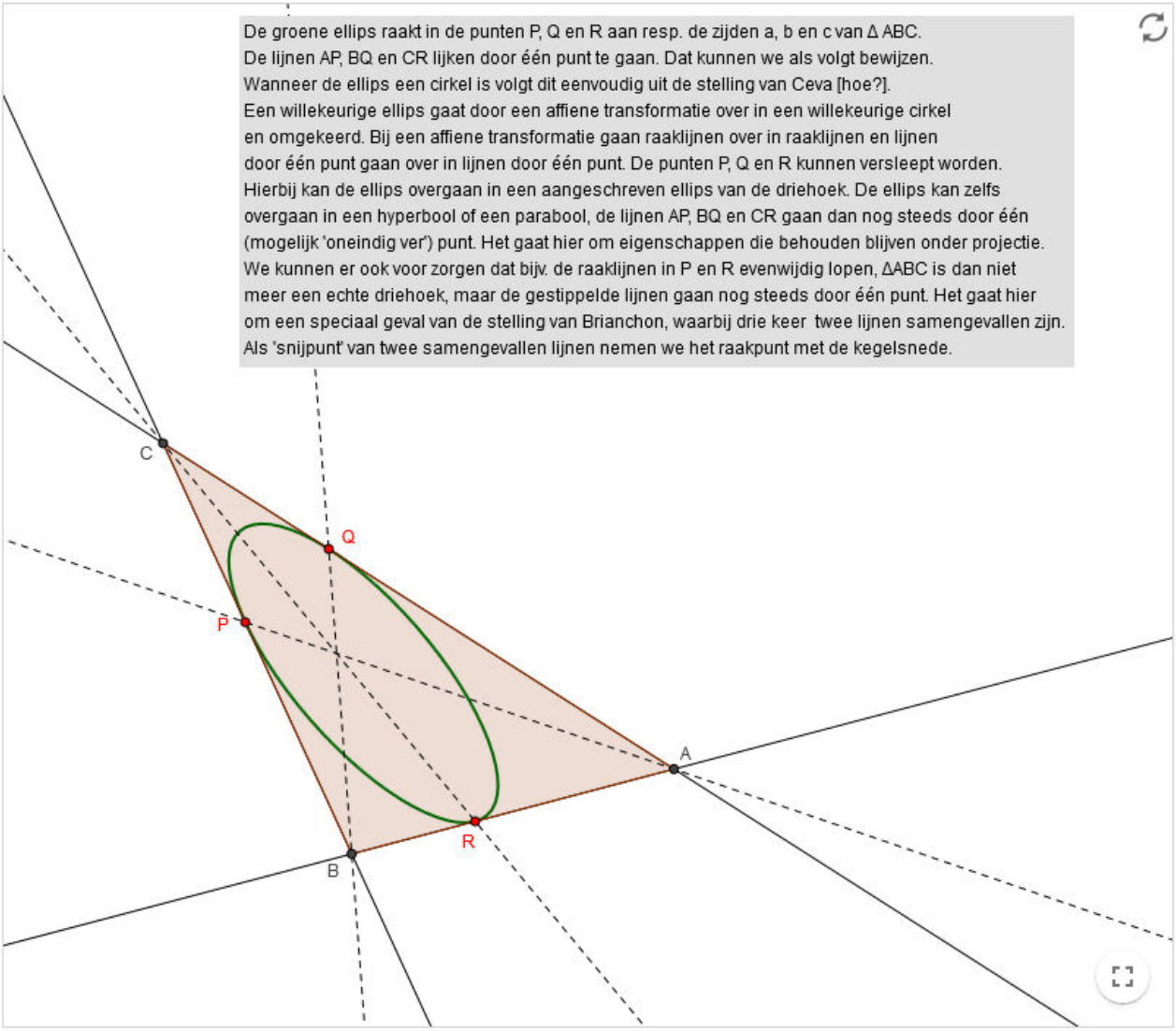


De zijden [dat zijn lijnen en niet lijnstukken] van zeshoek PQRSTU raken aan de blauwe kegelsnede in A, B, C, D, E en F. Volgens de stelling van Brianchon gaan de verbindingslijnen van de overstaande hoekpunten van de zeshoek door één punt

Raakpunt F kan over de kegelsnede versleept worden. Ga na dat de stelling blijft gelden, als F samenvalt met één van de andere punten. Ook de andere raakpunten kunnen versleept worden. Hierdoor kan de kegelsnede overgaan in een ellips, hyperbool, parabool of zelfs in een paar al dan niet samenvallende lijnen.

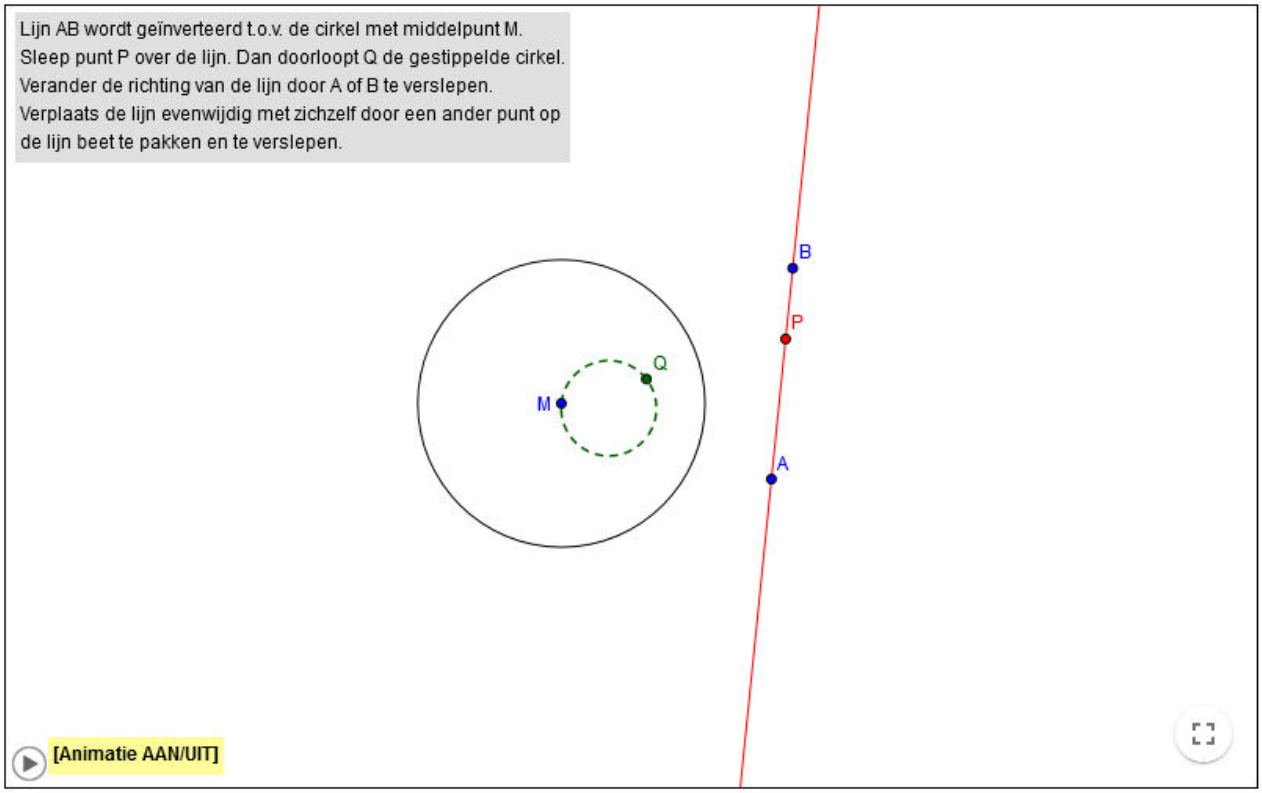
Lijnen door één punt

Auteur: Rinse Poortinga



Een lijn inverteren

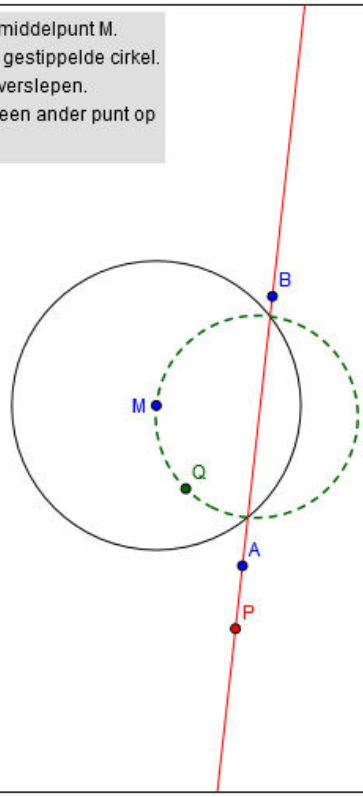
Auteur: Rinse Poortinga



Een lijn inverteren

Auteur: Rinse Poortinga

Lijn AB wordt geïnverteerd t.o.v. de cirkel met middelpunt M.
Sleep punt P over de lijn. Dan doorloopt Q de gestippelde cirkel.
Verander de richting van de lijn door A of B te verslepen.
Verplaats de lijn evenwijdig met zichzelf door een ander punt op de lijn beet te pakken en te verslepen.

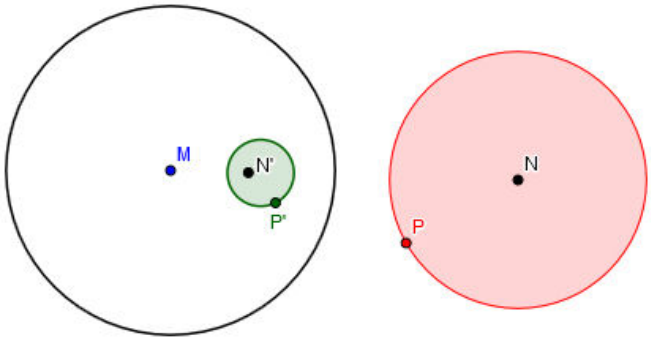


[Animatie AAN/UIT]

Een cirkel inverteren

Auteur: Rinse Poortinga

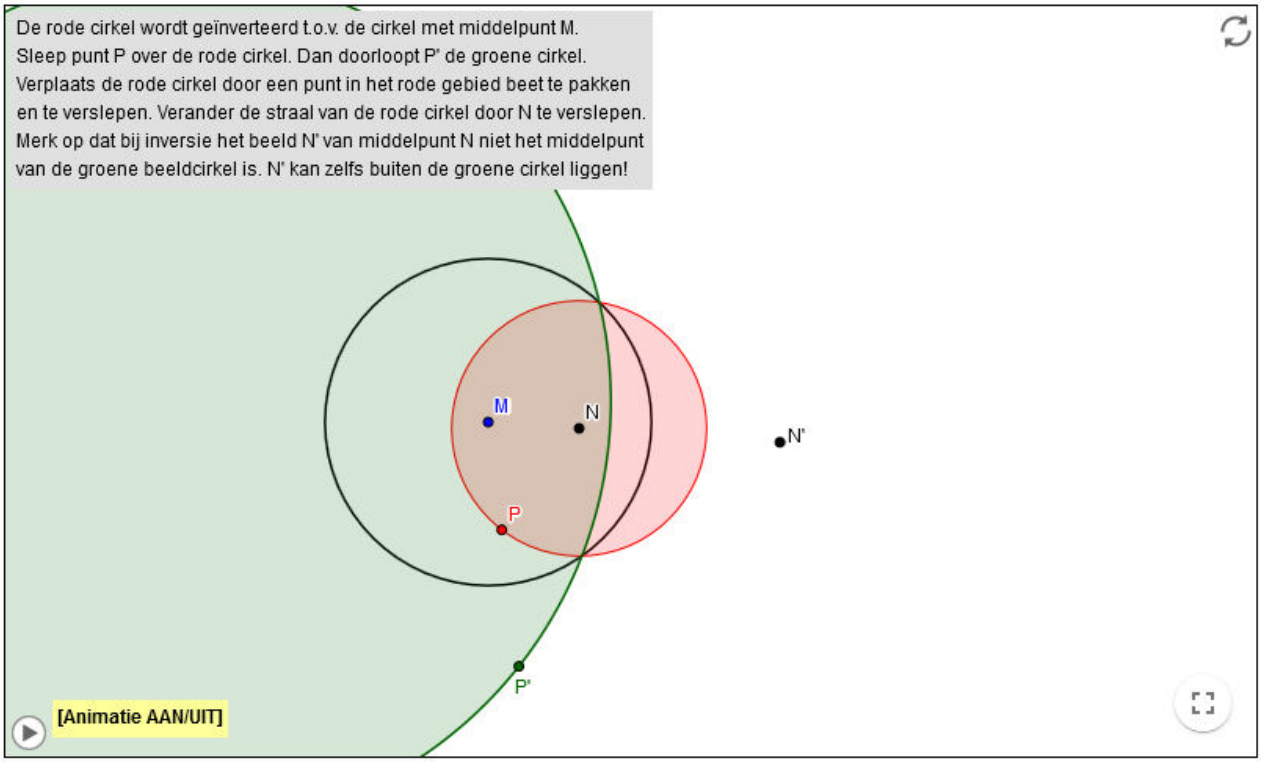
De rode cirkel wordt geïnverteerd t.o.v. de cirkel met middelpunt M.
Sleep punt P over de rode cirkel. Dan doorloopt P' de groene cirkel.
Verplaats de rode cirkel door een punt in het rode gebied beet te pakken en te verslepen. Verander de straal van de rode cirkel door N te verslepen.
Merk op dat bij inversie het beeld N' van middelpunt N niet het middelpunt van de groene beeldcirkel is. N' kan zelfs buiten de groene cirkel liggen!



[Animatie AAN/UIT]

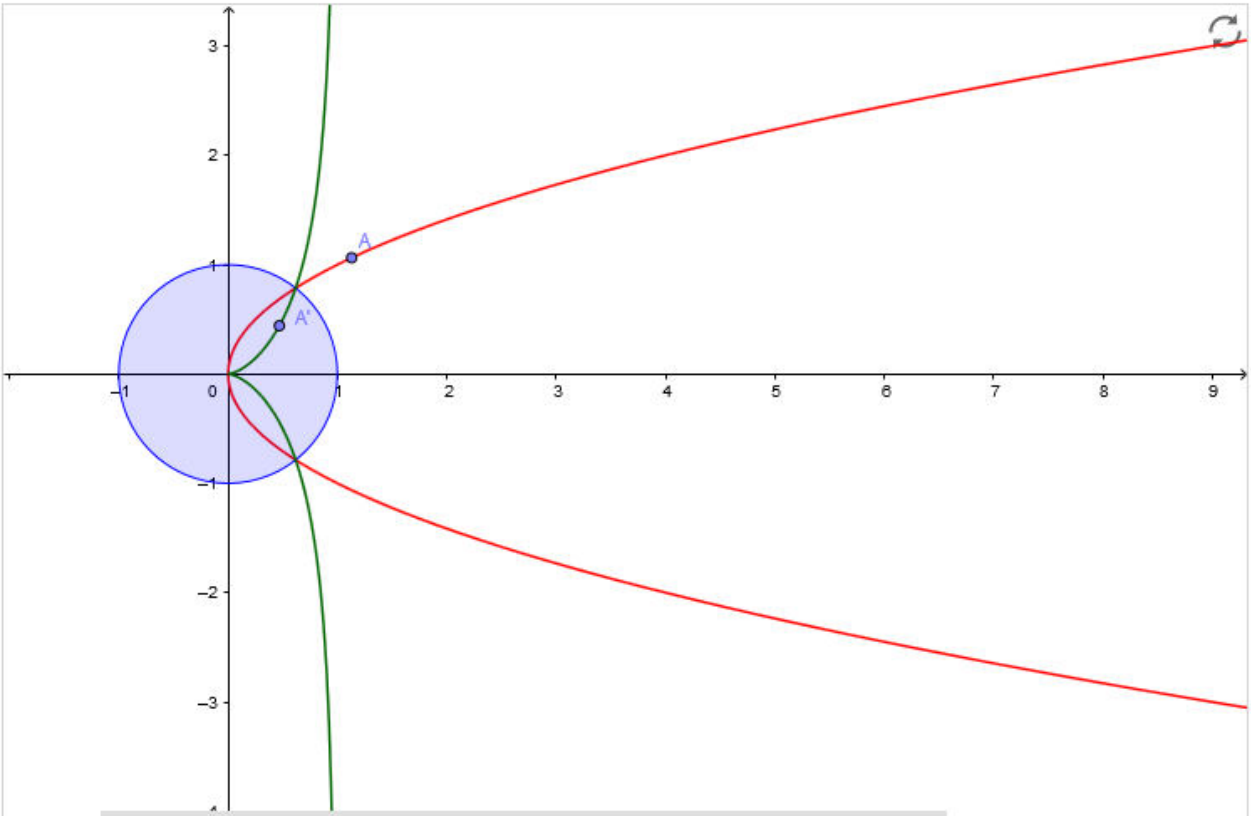
Een cirkel inverteren

Auteur: Rinse Poortinga



Een parabool inverteren

Auteur: Rinse Poortinga

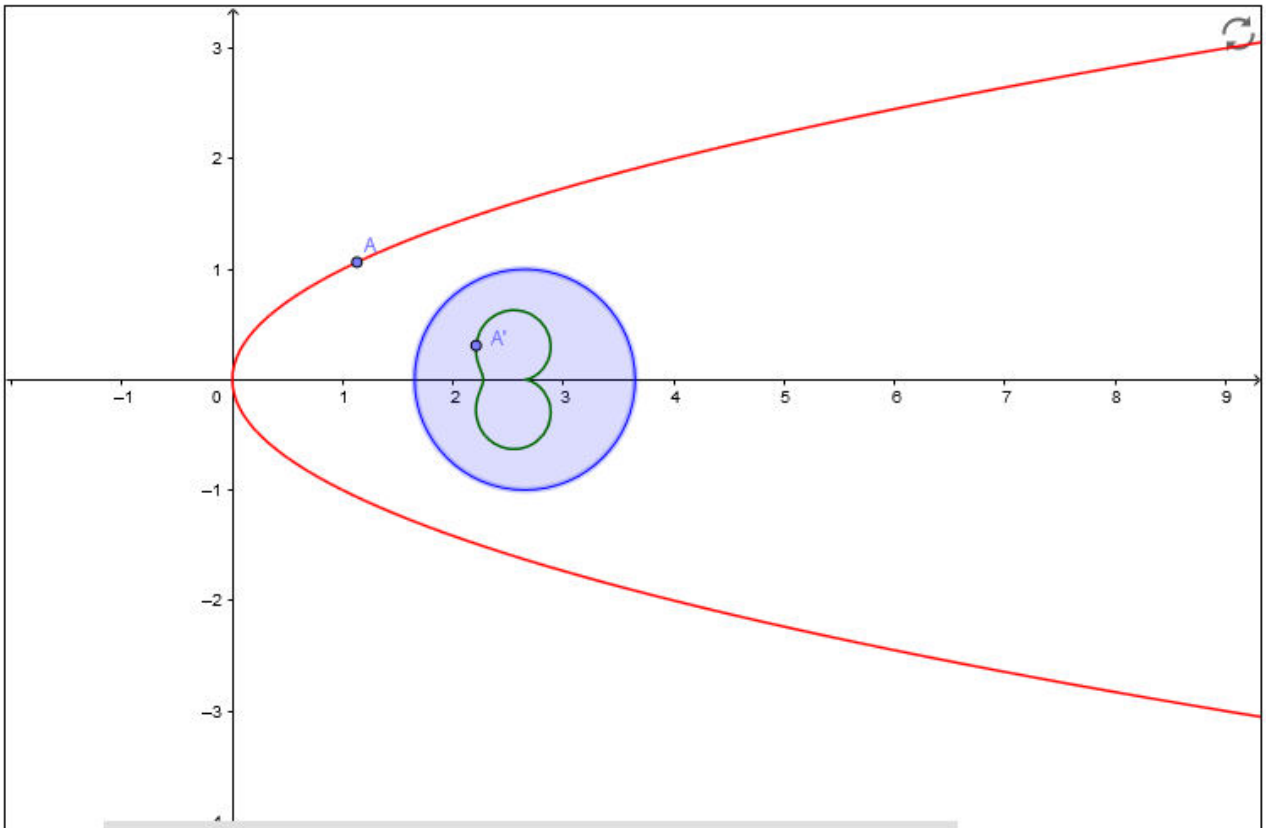


Opgave. De rode parabool $x = y^2$ wordt geïnverteerd t.o.v. de eenheidscirkel. Toon aan dat $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ een vergelijking is van de groene beeldkromme. Snijden met de lijn $y = tx$ levert een parametervoorstelling $x = t^2/(1+t^2)$, $y = t^3/(1+t^2)$ van deze cissoïde. Dezelfde cissoïde is ook de voetpuntskromme die bepaald wordt door een parabool $x = p \cdot y^2$ en zijn top O. Bereken voor welke waarde van p dit het geval is.

Opmerking. Het is mogelijk de cirkel te verslepen. Kijk wat er gebeurt.

Een parabool inverteren

Auteur: Rinse Poortinga

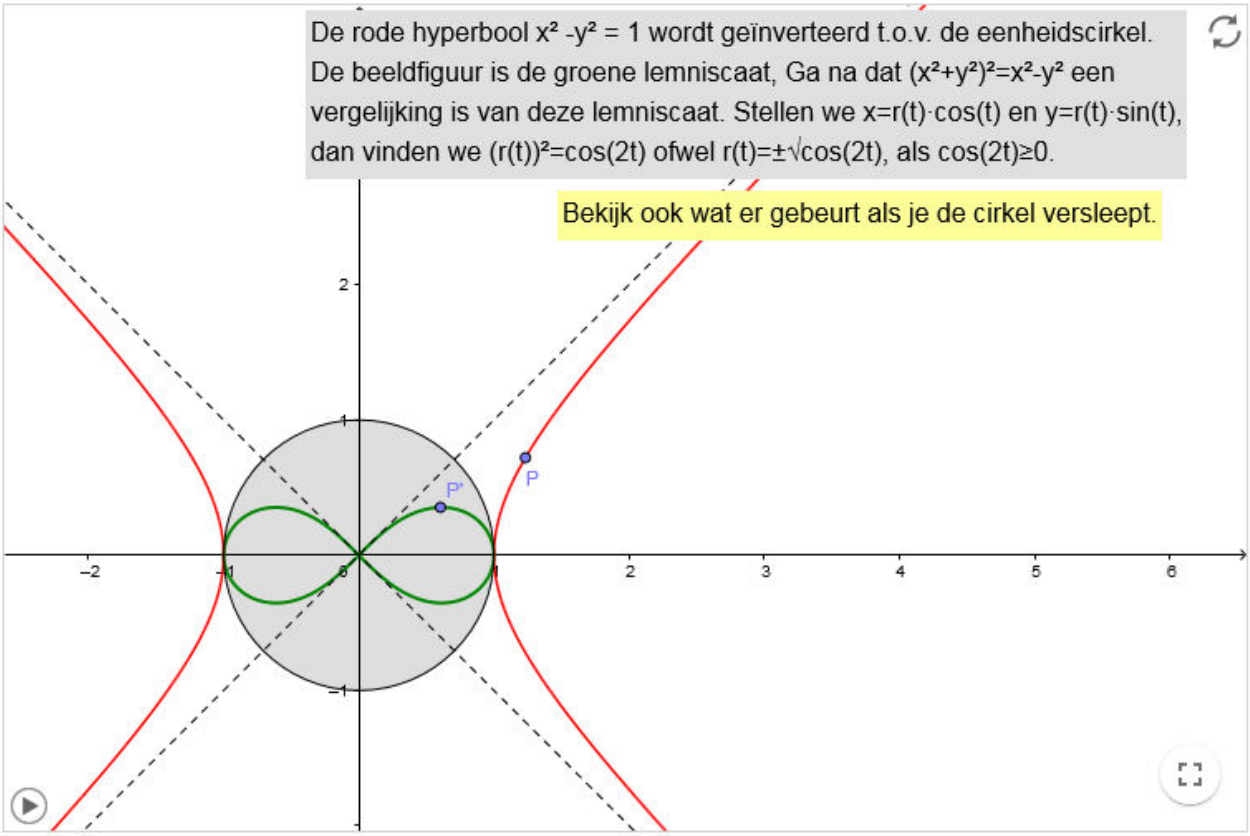


Opgave. De rode parabool $x = y^2$ wordt geïnverteerd t.o.v. de eenheidscirkel. Toon aan dat $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ een vergelijking is van de groene beeldkromme. Snijden met de lijn $y = tx$ levert een parametervoorstelling $x = t^2/(1+t^2)$, $y = t^3/(1+t^2)$ van deze cissoïde. Dezelfde cissoíde is ook de voetpuntskromme die bepaald wordt door een parabool $x = p \cdot y^2$ en zijn top O. Bereken voor welke waarde van p dit het geval is.

Opmerking. Het is mogelijk de cirkel te verslepen. Kijk wat er gebeurt.

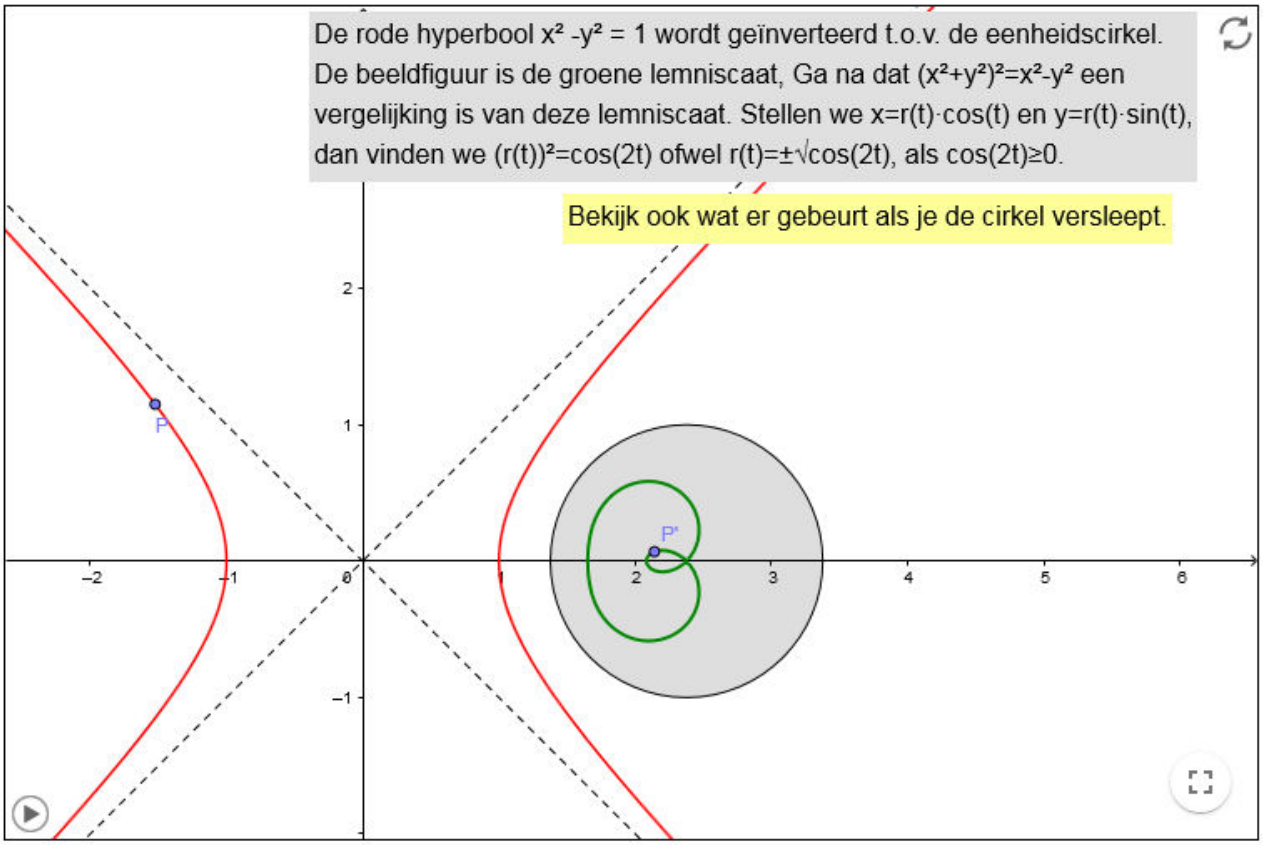
Een hyperbool inverteren

Auteur: Rinse Poortinga



Een hyperbool inverteren

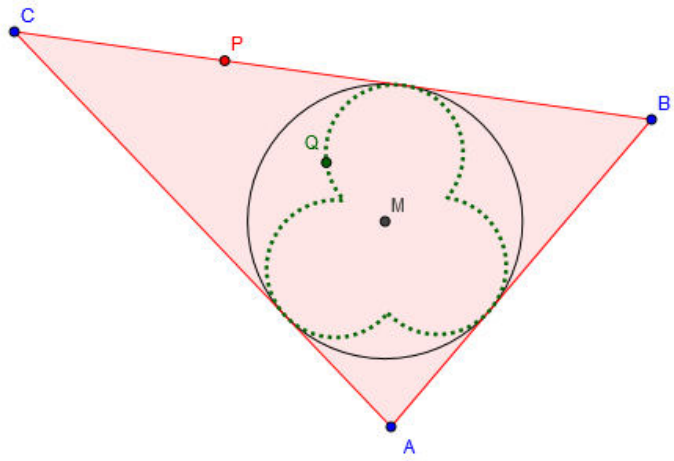
Auteur: Rinse Poortinga



Inverteer driehoek t.o.v ingeschreven cirkel

Auteur: Rinse Poortinga

ΔABC wordt geïnverteerd t.o.v. zijn ingeschreven cirkel.
Sleep punt P over de zijden van de driehoek.
Opgave: inverteer een ΔABC ook t.o.v. zijn omgeschreven cirkel.

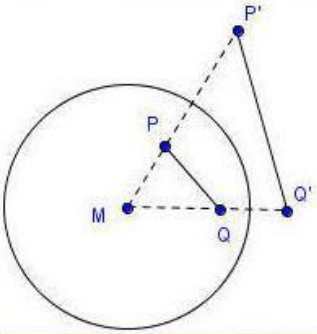


[Animatie AAN/UIT]

Ptolemaeus bewezen door inversie

Auteur: Rinse Poortinga

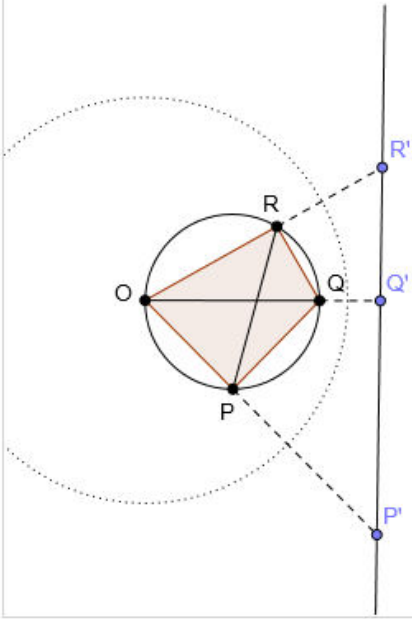
We bewijzen eerst:



De punten P en Q worden geïnverteerd t.o.v een cirkel met middelpunt M en straal r.
Dan geldt: ΔMPQ is gelijkvormig met $\Delta MQ'P'$ en $P'Q'=PQ\cdot r^2/(MP\cdot MQ)$.

Bewijs. $MP\cdot MP'=MQ\cdot MQ'=r^2$, dus $MP/MQ=MQ'/MP'$. Dus $\Delta PMQ \approx \Delta Q'MP'$.
[Wegens zhz. Let op de volgorde van de corresponderende hoekpunten.]
$P'Q'=c\cdot PQ$ met $c=MQ'/MP=r^2/(MP\cdot MQ)$

Met behulp van dit resultaat bewijzen we de volgende stelling:



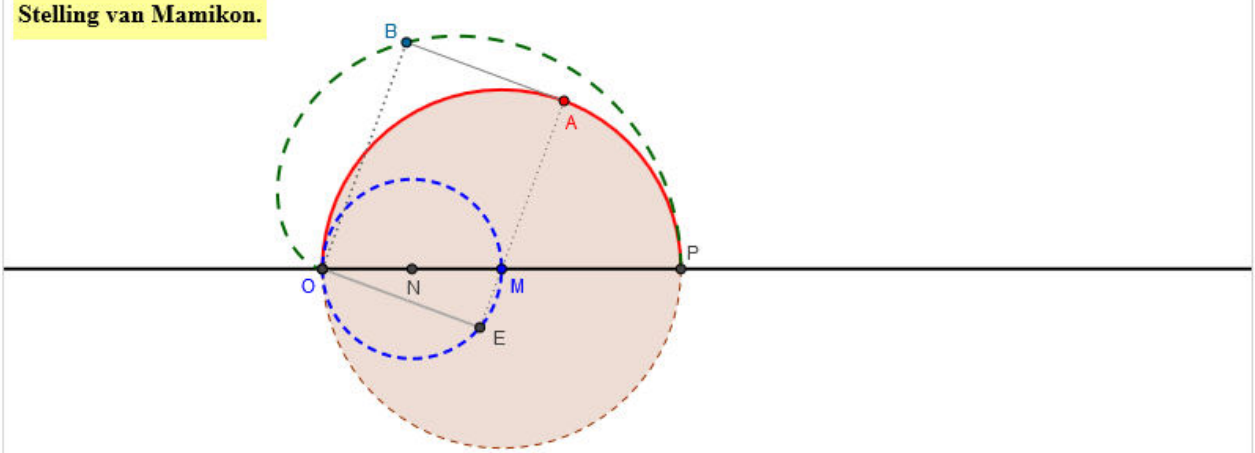
Ptolemaeus. In een koordenvierhoek die zichzelf niet doorsnijdt geldt:
Het product van de diagonalen is gelijk aan de som
van de producten van de beide paren overstaande zijden.

Bewijs. Het kan geen kwaad om te veronderstellen dat O een van de hoekpunten is. Bij inversie t.o.v. de eenheidscirkel gaat de omgeschreven cirkel van de vierhoek (m.u.v. punt O) over in een lijn. Voor de beeldpunten van P, Q en R geldt P'R'=P'Q'+Q'R'. Volgens de stelling hierboven: P'R'=c1·PR, P'Q'=c2·PQ en Q'R'=c3·QR met c1=1/(OP·OR), c2=1/(OP·OQ) en c3=1/(OQ·OR). Ga na dat hieruit volgt: OQ·PR=OR·PQ+OP·RQ.

Stelling van Mamikon geverifieerd bij een cardioïde

Auteur: Rinse Poortinga

Stelling van Mamikon.



Punt A ligt op de rode cirkel met middelpunt M(1,0) en straal 1.
OEAB is een rechthoek. Als punt A de bovenste helft van de rode cirkel doorloopt, dan doorloopt B de bovenste helft van een cardioïde en punt E doorloopt een cirkel met middellijn OM. Volgens de stelling van Mamikon is de oppervlakte van het door raaklijnstuk AB bestreken gebied gelijk aan de oppervlakte van het door lijnstuk OE bestreken binnengebied van de cirkel (N,1/2) en dus gelijk aan π/4.
Sleep punt A over de cirkel of zet de animatie aan.

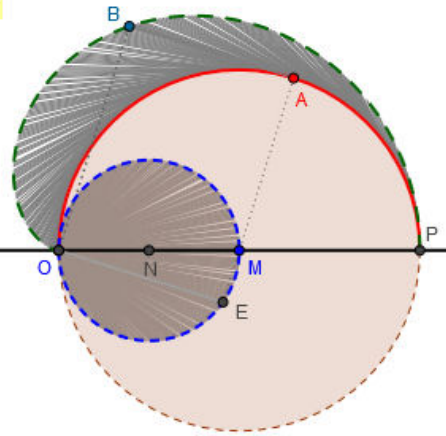
Opdracht. Parametervoorstelling van de cardioïde is $x = (1+\cos(t))\cdot\cos(t)$, $y = (1+\cos(t))\cdot\sin(t)$ met $0 \le t \le 2\pi$. Bereken de oppervlakte van de cardioïde en verifieer dat de stelling van Mamikon hier het juiste resultaat geeft.

[Animatie AAN/UIT]

Stelling van Mamikon geverifieerd bij een cardioïde

Auteur: Rinse Poortinga

Stelling van Mamikon.



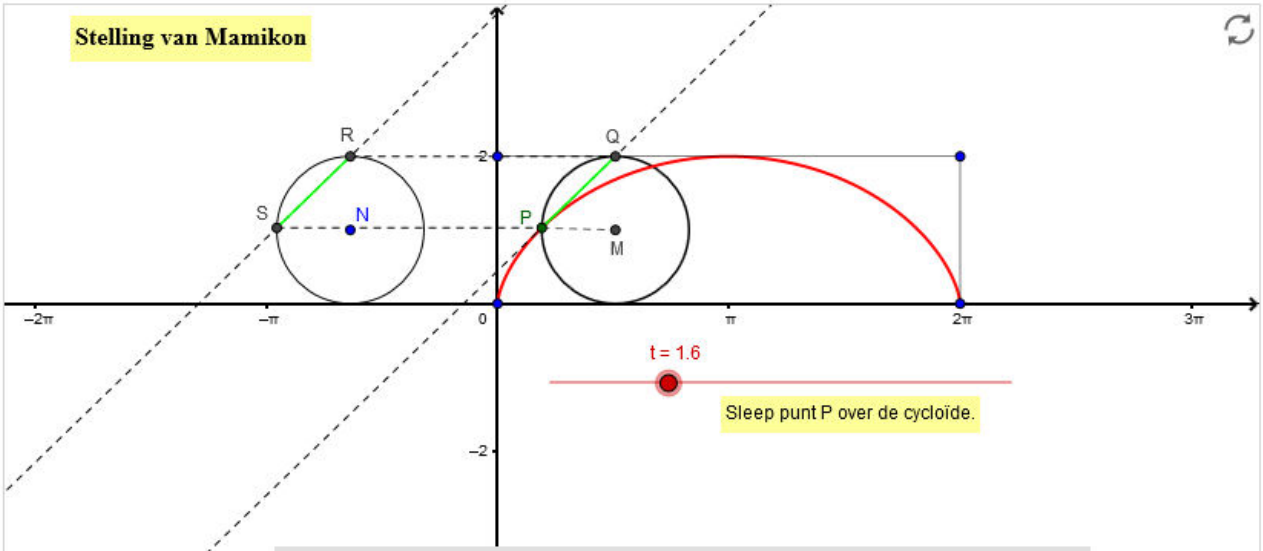
Punt A ligt op de rode cirkel met middelpunt M(1,0) en straal 1.
OEAB is een rechthoek. Als punt A de bovenste helft van de rode cirkel doorloopt, dan doorloopt B de bovenste helft van een cardioïde en punt E doorloopt een cirkel met middellijn OM. Volgens de stelling van Mamikon is de oppervlakte van het door raaklijnstuk AB bestreken gebied gelijk aan de oppervlakte van het door lijnstuk OE bestreken binnengebied van de cirkel (N,1/2) en dus gelijk aan π/4.
Sleep punt A over de cirkel of zet de animatie aan.

Opdracht. Parametervoorstelling van de cardioïde is $x = (1+\cos(t))\cdot\cos(t)$, $y = (1+\cos(t))\cdot\sin(t)$ met $0 \le t \le 2\pi$. Bereken de oppervlakte van de cardioïde en verifieer dat de stelling van Mamikon hier het juiste resultaat geeft.

[Animatie AAN/UIT]

Oppervlakte onder cycloïdeboog m.b.v. Mamikon.

Auteur: Rinse Poortinga

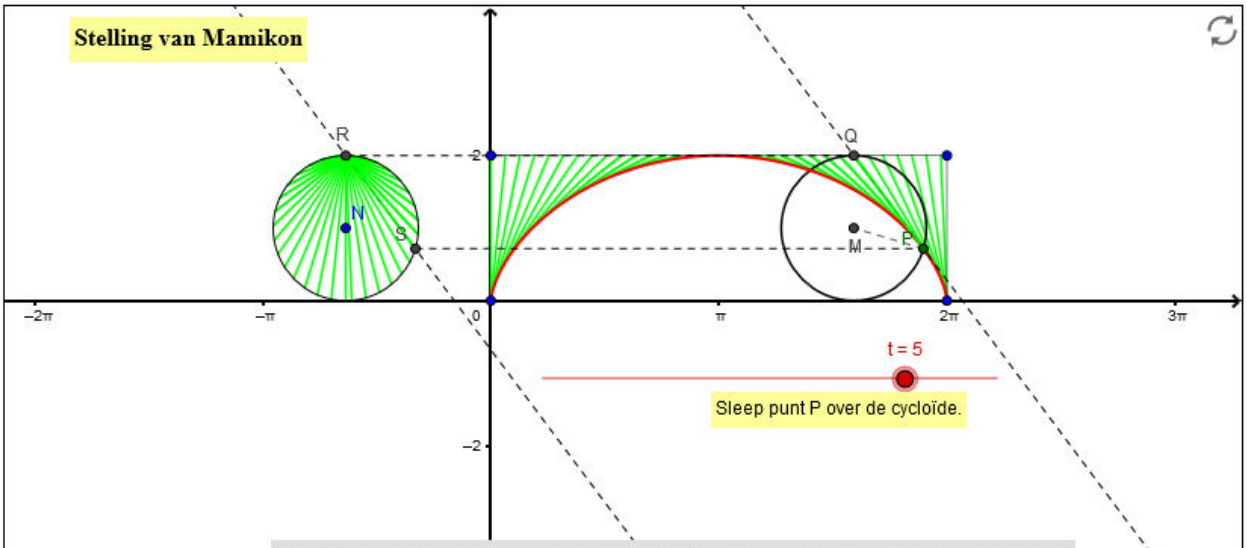


M(t,1) is het middelpunt van een cirkel met straal 1. Deze cirkel rolt over de x-as. Punt P(t-sin(t),1-cos(t)) doorloopt daarbij de rode cycloïde. Q is het punt (t,2). Ga na dat lijnstuk PQ in P aan de cycloïde raakt. De linkercirkel heeft middelpunt N(-2,1) en straal 1. Punt R is het punt (-2,2) en PQRS is een parallellogram. Als P de cycloïde doorloopt, dan bestrijkt het raaklijnstuk PQ de twee gebieden tussen de cycloïde en de lijn y = 2. Tegelijkertijd bestrijkt lijnstuk RS het binnengebied van de linker cirkel. Uit de stelling van Mamikon volgt nu dat de door PQ bestreken gebieden samen dezelfde oppervlakte hebben als de cirkel (N,1). Hieruit volgt weer dat het gebied dat begrensd wordt door de cycloïdeboog en de x-as gelijk is aan 3π, zoals we eerder al zagen met behulp van het beginsel van Cavalieri.

[Animatie AAN/UIT]

Oppervlakte onder cycloïdeboog m.b.v. Mamikon.

Auteur: Rinse Poortinga

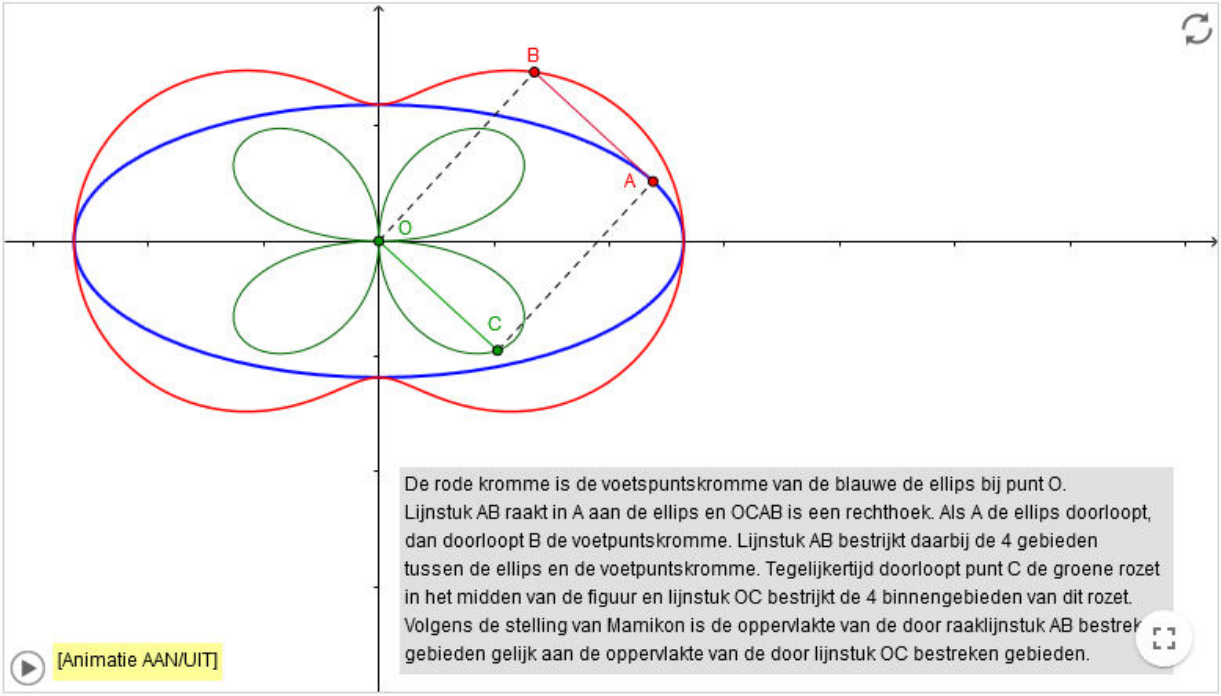


M(t,1) is het middelpunt van een cirkel met straal 1. Deze cirkel rolt over de x-as. Punt P(t-sin(t),1-cos(t)) doorloopt daarbij de rode cycloïde. Q is het punt (t,2). Ga na dat lijnstuk PQ in P aan de cycloïde raakt. De linkercirkel heeft middelpunt N(-2,1) en straal 1. Punt R is het punt (-2,2) en PQRS is een parallellogram. Als P de cycloïde doorloopt, dan bestrijkt het raaklijnstuk PQ de twee gebieden tussen de cycloïde en de lijn y = 2. Tegelijkertijd bestrijkt lijnstuk RS het binnengebied van de linker cirkel. Uit de stelling van Mamikon volgt nu dat de door PQ bestreken gebieden samen dezelfde oppervlakte hebben als de cirkel (N,1). Hieruit volgt weer dat het gebied dat begrensd wordt door de cycloïdeboog en de x-as gelijk is aan 3π, zoals we eerder al zagen met behulp van het beginsel van Cavalieri.

[Animatie AAN/UIT]

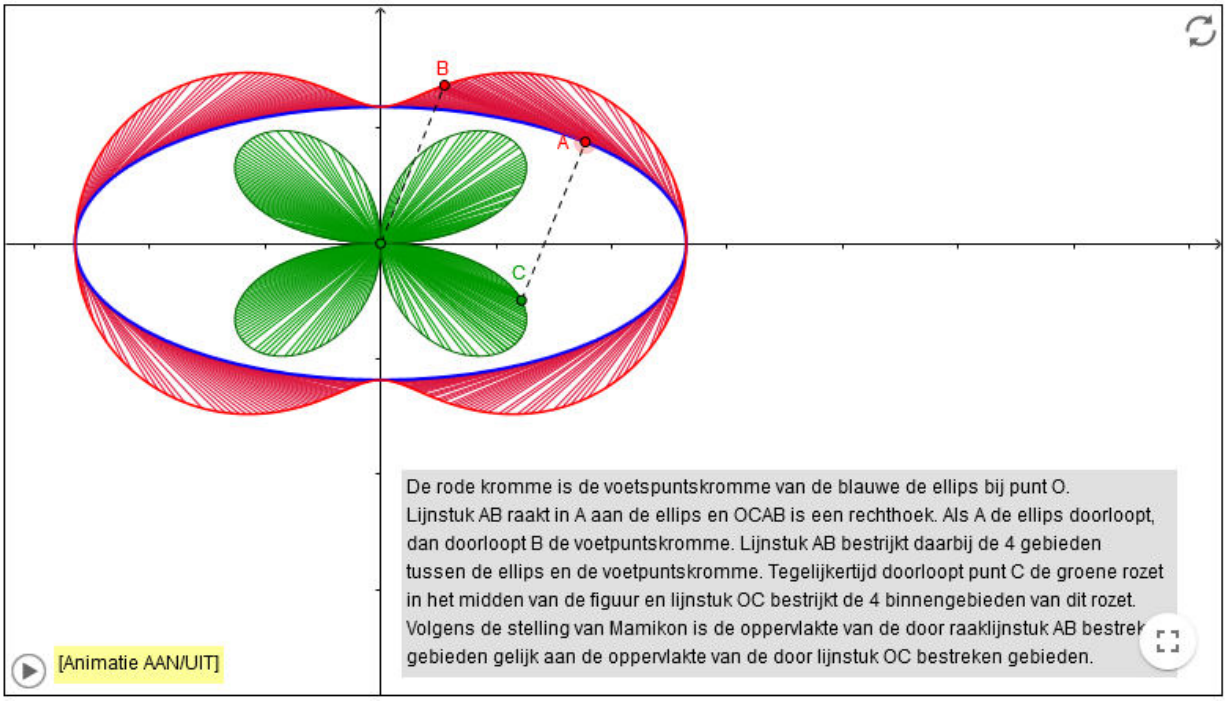
Voetpuntskromme van een ellips en de stelling van Mamikon

Auteur: Rinse Poortinga



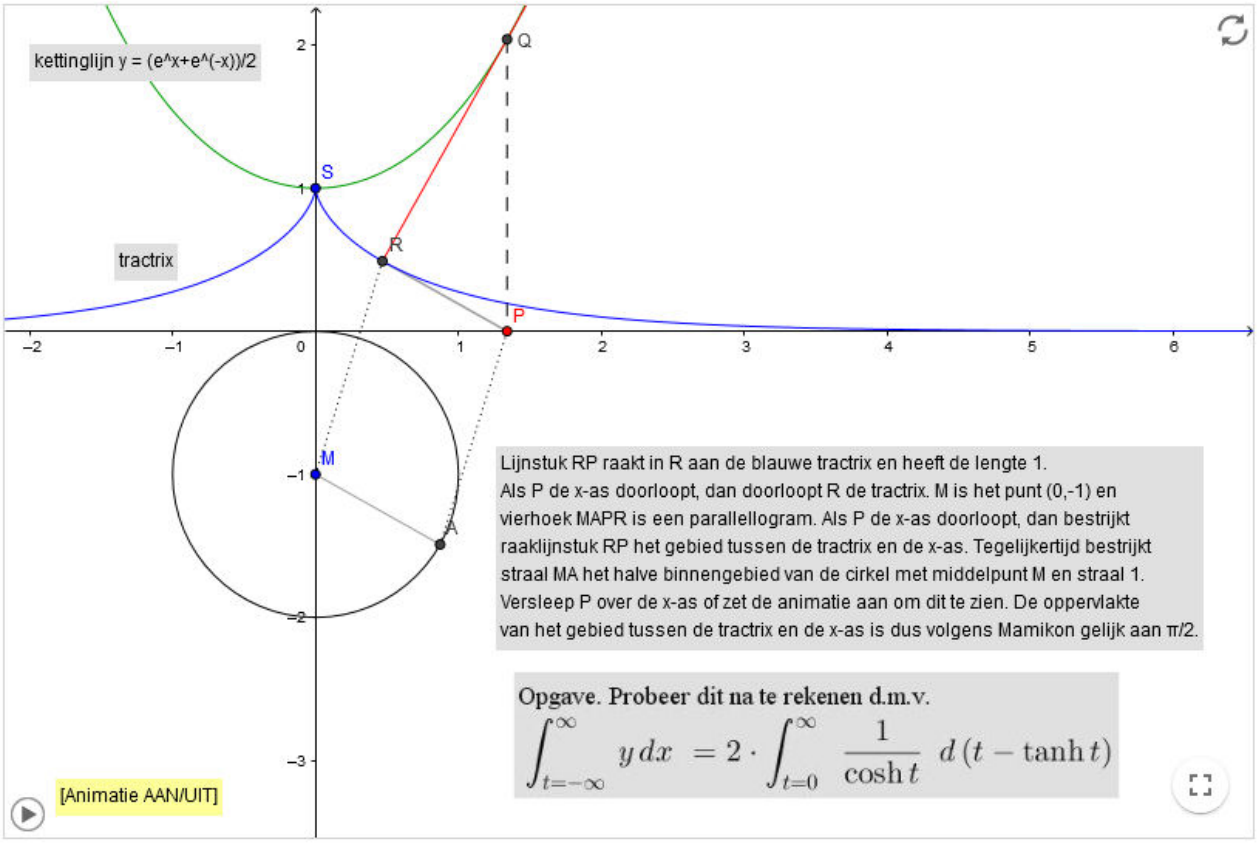
Voetpuntskromme van een ellips en de stelling van Mamikon

Auteur: Rinse Poortinga



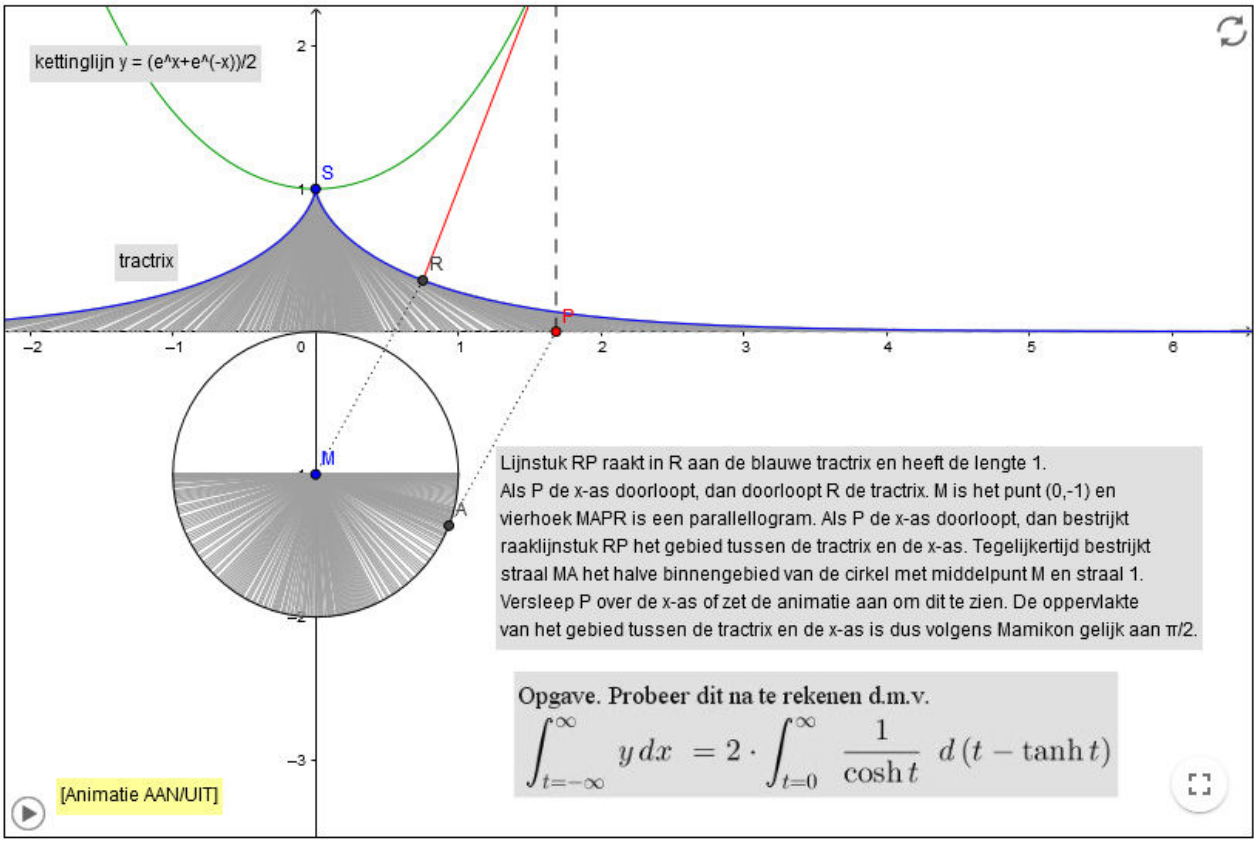
Oppervlakte tussen tractrix en x-as m.b.v. Mamikon

Auteur: Rinse Poortinga



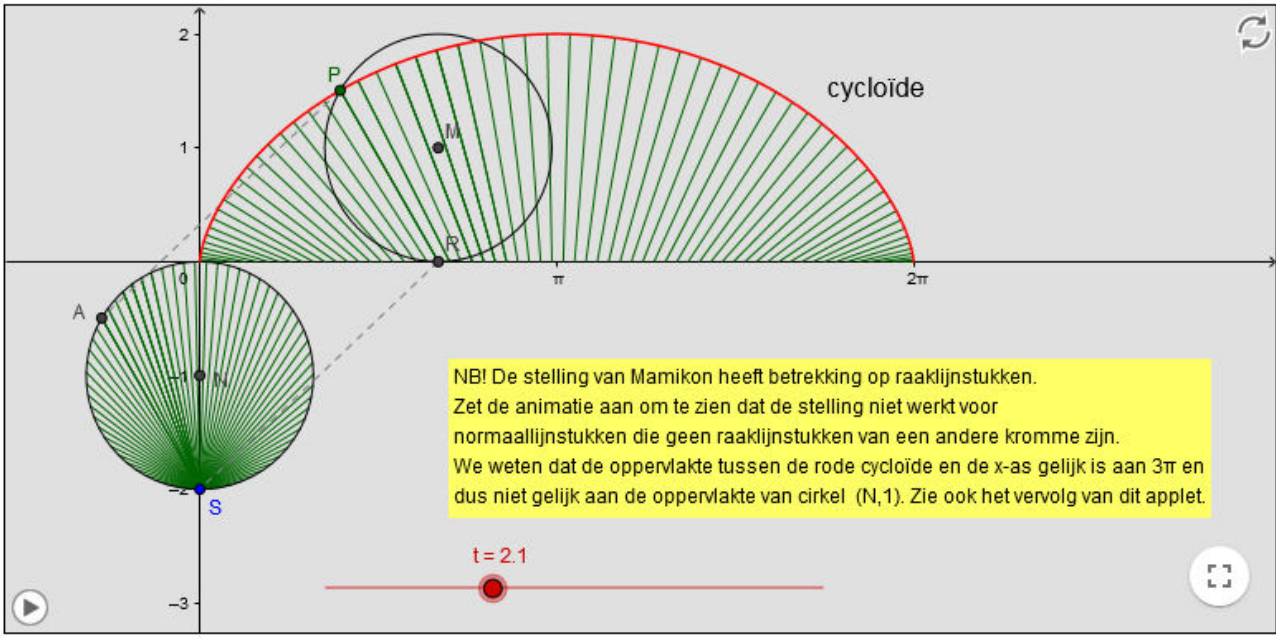
Oppervlakte tussen tractrix en x-as m.b.v. Mamikon

Auteur: Rinse Poortinga



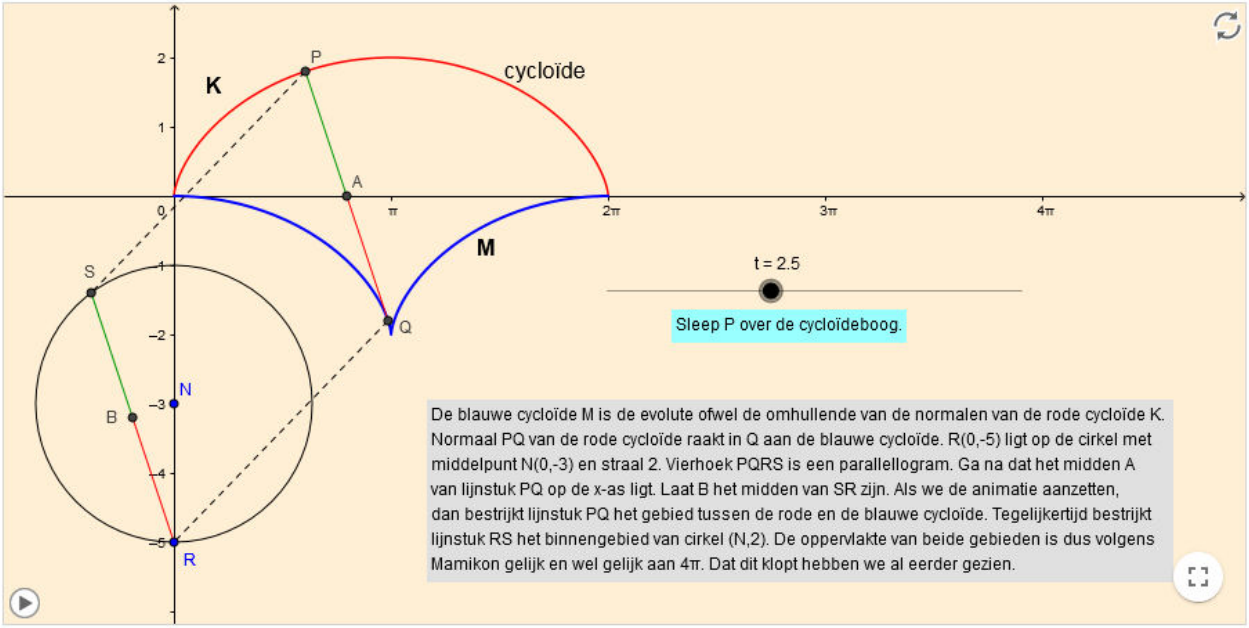
Mamikon geldt alleen bij raaklijnstukken

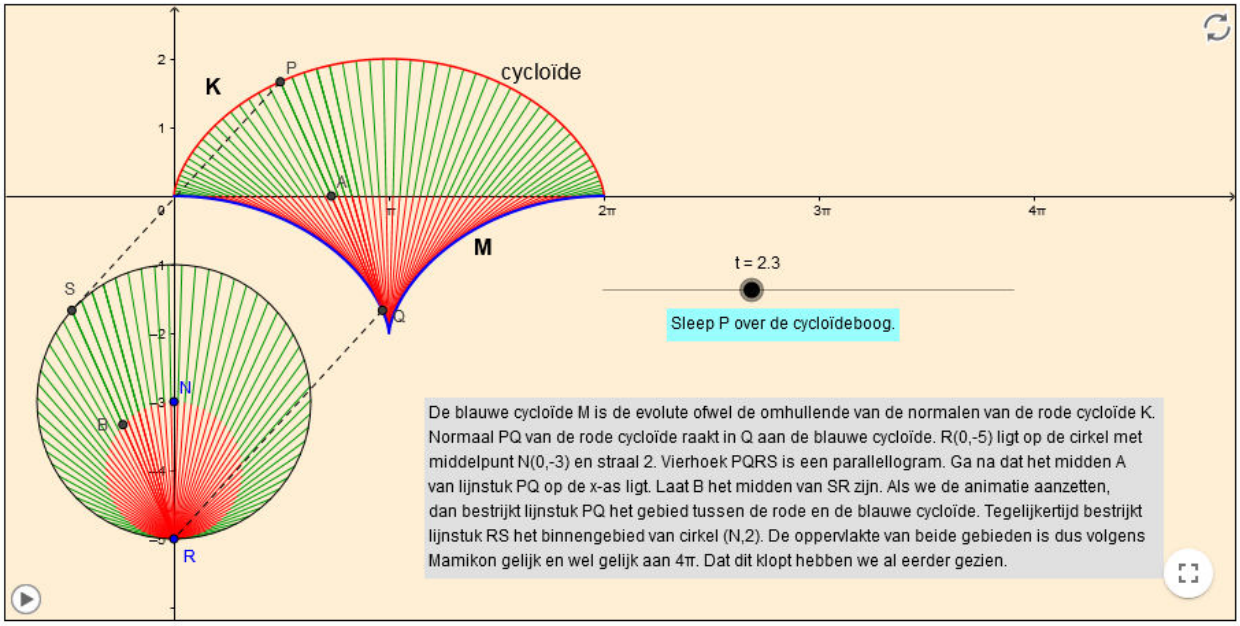
Auteur: Rinse Poortinga



Mamikon geldt alleen voor raaklijnstukken (vervolg)

Auteur: Rinse Poortinga



Mamikon geldt alleen voor raaklijnstukken (vervolg)

Auteur: Rinse Poortinga